

ODREĐIVANJE BALISTIČKE PUTANJE ŽIROSKOPSKO STABILISANIH PROJEKTILA METODOM MODIFIKOVANE MATERIJALNE TAČKE

PREDICTION THE BALLISTIC TRAJECTORY OF SPIN-STABILISED PROJECTILES BY METHOD OF MODIFIED POINT MASS

Zijo Pekić, dipl. maš. inž.

Mašinski fakultet u Sarajevu, Odjeljenje za odbrambene tehnologije

Sabina Serdarević-Kadić, dipl. maš. inž.

Mašinski fakultet u Sarajevu, Odjeljenje za odbrambene tehnologije

Ključne riječi: spoljna balistika, žirostabilisani projektili, putanja projektila, matematički model

SAŽETAK

U radu je prikazan savremeni postupak proračuna prostorne balističke putanje primjenljiv za projekte koji stabilnost tokom leta ostvaruju žiroskopskim efektom. Analizirane su najuticajnije aerodinamičke sile i momenti koji utiču na putanju i izveden je sistem vektorskih jednačina kojim je determinisan matematički model kretanja projektila.

Projektovanjem vektorskog sistema na koordinatne ose geodetskog koordinatnog sistema dobijen je sistem diferencijalnih jednačina sa dodatnim algebarskim relacijama pogodan za programiranje. Tačnost modela ilustrovana je kroz primjer proračuna putanje projektila 155 mm M549A1, čiji rezultati su upoređeni sa eksperimentalnim podacima sa poligonskih ispitivanja.

SUMMARY

A modern computation procedure for ballistic trajectory prediction, applicable to spin-stabilized dynamically stable projectiles, is presented. The most influenceable aerodynamic forces and moments acting on a projectile have been analysed, and vector equations of motion, determining the mathematical model, have also been derived.

By projection of vector equations of motion on right-handed ground fixed orthogonale coordinate system axes, the system of differential equations including additional algebraic relations, suitable for programming have been obtained. A model accuracy is shown through an example of computed trajectory of 155 mm M549A1 projectile, whose results are compared to experimental data from firing range testing.

1. UVOD

Osnovni zadatak spoljne balistike je da se za projektil poznatih karakteristika, od jednog određenog trenutka, sa dovoljnom tačnošću, odrede karakteristike putanje do padne ili druge zadane tačke. Ovaj

problem se često naziva i direktan zadatak spoljne balistike za čije rješavanje je potrebno odrediti sile koje djeluju na projektil, napisati diferencijalne jednačine kretanja, a zatim, rješavajući sistem diferencijalnih jednačina, odrediti karakteristike kretanja: koordinate težišta tokom leta projektila.

Projektil kao osnosimetrično kruto tijelo ima težnju da postavi uzdužnu osu simetrije u pravcu brzine, ostvarujući najmanji otpor kretanju kroz vazduh. Sposobnost projektila da u toku leta održi ugao između vektora brzine i ose projektila u dovoljno uskim granicama predstavlja dinamičku stabilnost projektila. Stabilnost projektila oblika rotacionog tijela može se ostvariti obrtanjem projektila oko njegove ose velikom ugaonom brzinom, tj. žiroskopskim efektom. Dovoljna ugaona brzina obezbjeđuje se preko vodećeg prstena koji se urezuje u zavojne žljebove cijevi oruđa.

Upotrebljivost bilo kojeg matematičkog modela definisana je njegovom sposobnošću da obezbijedi što približnije poklapanje sa eksperimentalnim rezultatima u okviru što šireg dijapazona uslova upotrebe. Cilj ovog rada je da prikaže matematički model za simulaciju putanje artiljerijskih žirostabilisanih projektila koji u sebi sintetizira prednosti Euler-ovog modela i modela putanje sa šest stepeni slobode, kao što su jednostavnost, velika proračunska brzina i visoka tačnost.

2. OSNOVNE JEDNAČINE KRETANJA PROJEKTILA

Ako je poznat sistem spoljašnjih sila koje utiču na kretanje projektila, vektorska jednačina kretanja njegovog centra mase data je u obliku :

$$m\ddot{\vec{r}} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.1)$$

gdje su :

- m - masa projektila
- \vec{V} - vektor apsolutne brzine centra masa projektila
- \vec{F}_i - i-ta spoljašnja sila

Rješenje vektorske jednačine (2.1) svodi se na njenu transformaciju u sistem skalarnih jednačina, odnosno projektovanje na ose unaprijed odabranog koordinatnog sistema.

U balističkim analizama obično se razmatra kretanje projektila u odnosu na koordinatni sistem vezan za Zemlju. Pošto se Zemlja okreće, onda brzina centra mase projektila \vec{V} u odnosu na Zemlju predstavlja brzinu u odnosu na pokretni koordinatni sistem.

Izračunavanje maksimalnih vrijednosti prenosnog i Koriolisovog ubrzanja za ekstremne slučajeve koji se mogu pojaviti pri letu brzorotirajućih artiljerijskih projektila pokazuju da praktično u svim slučajevima leta takvih projektila nije neophodno uzimati u obzir uticaj inercijalnih sila. Shodno tome, možemo usvojiti da su $\vec{a}_p = \vec{a}_{cor} = 0$, tj. usvajamo pretpostavku da je Zemlja nepokretna, a brzina \vec{V} u odnosu na Zemlju je apsolutna brzina.

Uz prethodne pretpostavke vektorska jednačina kretanja centra mase projektila svodi se na:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R} + m\vec{g} \quad (2.2)$$

Analiziraćemo sada kretanje projektila kao krutog tijela u datom koordinatnom sistemu. Pošto je artiljerijski projektil tijelo rotacionog oblika, dodijelimo osi rotacione simetrije jedinični vektor \vec{x}_0 , sa izabranim pozitivnim smjerom usmjerenim od centra masa ka vrhu projektila.

Ukupni moment količine kretanja projektila se može izraziti kao suma dva vektora u koordinatnom sistemu vezanom za Zemlju :

- momenta količine kretanja oko vektora \vec{x}_0
- momenta količine kretanja oko ose koja je normalna na vektor \vec{x}_0 .

Moment količine kretanja oko vektora \vec{x}_0 ima intenzitet $I_x p$, gdje je I_x moment inercije projektila oko \vec{x}_0 , a vektorski predstavljen ovaj moment je $I_x p \vec{x}_0$.

Ukupna ugaona brzina projektila oko ose normalne na \vec{x}_0 je data vektorom $\vec{\Omega} = (\vec{x}_0 \times \dot{\vec{x}}_0)$.

Pošto tijelo projektila ima rotacionu simetriju, svaka osa koja prolazi kroz centar masa, a normalna je na \vec{x}_0 , je glavna osa inercije. Ako je moment inercije projektila oko neke poprečne ose koja prolazi kroz centar mase označen sa I_y , ukupni moment količine kretanja oko te ose normalne na \vec{x}_0 biće predstavljen vektorom $I_y(\vec{x}_0 \times \dot{\vec{x}}_0)$. Sada se ukupni moment količine kretanja projektila \vec{K} može predstaviti u obliku vektorskog zbira prethodnih komponentata :

$$\vec{K} = I_x p \cdot \vec{x}_0 + I_y \cdot (\vec{x}_0 \times \dot{\vec{x}}_0) \quad (2.3)$$

Ako sa $\sum \vec{M}$ označimo sumu spoljnih momenata koji djeluju na projektil, onda će osnovna jednačina kretanja projektila oko centra mase glasiti:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = I_x \frac{dp}{dt} \cdot \vec{x}_0 + I_x p \cdot \dot{\vec{x}}_0 + I_y (\vec{x}_0 \times \ddot{\vec{x}}_0) = \sum \vec{M} \quad (2.4)$$

Sada je neophodno definisati aerodinamičke sile i momente koji determinišu model kretanja projektila.

3. AERODINAMIČKE SILE I MOMENTI

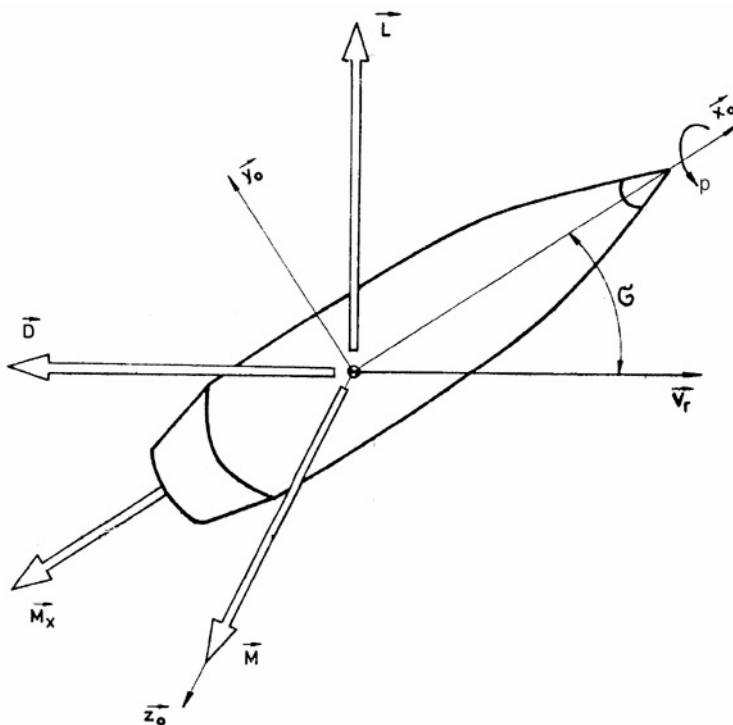
Ukupna aerodinamička sila \vec{R} i moment \vec{M} nastaju kao rezultat međusobnog djelovanja atmosfere sredine i projektila koji se kreće kroz nju. Veličina, pravac i položaj napadne tačke ukupne aerodinamičke sile (centar pritiska) zavisi od oblika, dimenzija projektila, orijentacije u odnosu na struju vazduha i karakteristika vazdušne struje - gustine, brzine, stepena stišljivosti, itd.

U ovoj analizi usvojićemo da se ukupna aerodinamička sila \vec{R} sastoji od dvije dominantne komponente, otpora \vec{D} i uzgona \vec{L} , zanemarujući Magnusovu silu (koja je po intenzitetu preko 100 puta manja od uzgona) i ostale sekundarne sile nestacionarnog karaktera.

Ukupna aerodinamička sila je zbir vektora:

$$\vec{R} = \vec{D} + \vec{L}$$

Aerodinamičke sile i momenti koje ćemo definisati u ovom modelu prikazani su na sl. 1.



Sl.1 Aerodinamičke sile i momenti

Otpor - Intenzitet sile otpora predstavljen je u klasičnoj spoljnoj balistici u obliku $\rho \frac{\pi d^2}{8} \cdot C_D \cdot V_r^2$, gdje su: ρ - gustina vazduha, d - kalibar, V_r - brzina centra masa projektila u odnosu na vazduh i C_D - bezdimenzionalni koeficijent otpora. Ako vektor \vec{V}_r predstavlja brzinu u odnosu na vazduh, onda je smjer otpora $-\vec{V}_r$.

Slika 1. ilustruje primjer projektila na koji djeluju aerodinamičke sile, gdje je smjer jediničnog vektora \vec{x}_0 orijentisan duž ose simetrije, a brzina je predstavljena sa \vec{V}_r . Ugao između \vec{V}_r i \vec{x}_0 označen je sa σ i uobičajeno se naziva nutacioni ugao.

Nutacioni ugao povećava otpor projektila zbog pojave indukovanog otpora koji raste sa njegovim kvadratom. Koeficijent indukovanog otpora označava se sa $C_{D\sigma^2}$, a povećanje koeficijenta otpora koje se javlja usljed nesimetričnog opstrujavanja je $C_{D\sigma^2} \cdot \sigma^2$. Efektivni koeficijent otpora je :

$$C_D = C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma^2 \quad (3.1)$$

Sila otpora vazduha predstavljena vektorski na bazi gornjih definicija je:

$$\vec{D} = -\frac{\rho \pi d^2}{8} \cdot (C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma^2) \cdot V_r \cdot \vec{V}_r \quad (3.2)$$

Uzgon - Aerodinamički uzgon javlja se usljed nesimetričnog opstrujavanja vazduha oko projektila koji leti pod napadnim uglom. Intenzitet sile uzgona dat je u obliku :

$$L = \rho \frac{\pi d^2}{8} C_{L\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \sin \sigma \quad (3.3)$$

gdje je: $C_{L\sigma}$ - bezdimenzionalni gradijent koeficijenta uzgona. Uzgon djeluje u ravni nutacionog ugla i normalan je na smjer kretanja projektila.

Ako razmotrimo vektor $[\vec{V}_r \times (\vec{x}_0 \times \vec{V}_r)]$ vidimo da ovaj vektor ima intenzitet $V_r^2 \cdot \sin \sigma$ i normalan je na \vec{V}_r , a leži u ravni koja sadrži \vec{V}_r i \vec{x}_0 . Pomoću njega možemo predstaviti vektor uzgona u obliku :

$$\vec{L} = \rho \frac{\pi d^2}{8} C_{L\sigma} \cdot [\vec{V}_r \times (\vec{x}_0 \times \vec{V}_r)] \quad (3.4)$$

Ako se vektor ukupne aerodinamičke sile projektuje paralelno i normalno na \vec{x}_0 umjesto na \vec{V}_r , dobićemo komponente koje nazivamo aksijalna i normalna sila. Normalna sila je komponenta ukupne aerodinamičke sile koja proizvodi moment prevrtanja.

Destabilizujući statički aerodinamički moment - Ako pravac dejstva aerodinamičke normalne sile ne prolazi kroz centar mase, što je redovna pojava, kod rotacionih tijela se javlja aerodinamički moment prevrtanja. Intenzitet ovog momenta, koji je rezultat dejstva normalne sile na projektil, dat je u obliku:

$$M_a = \rho \frac{\pi d^3}{8} \cdot C_{m\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \sin \sigma \quad (3.5)$$

gdje je $C_{m\sigma}$ - bezdimenzionalni gradijent koeficijenta aerodinamičkog destabilizirajućeg momenta.

Vektor momenta prevrtanja je normalan na ravan nutacionog ugla (ravan opstrujavanja), odnosno ravan koju definišu vektori \vec{V}_r i \vec{x}_0 , a njegov smjer je određen vektorom $(\vec{V}_r \times \vec{x}_0)$ koji je po intenzitetu jednak $V_r \cdot \sin \sigma$. Sada moment prevrtanja u vektorskom obliku možemo predstaviti kao :

$$\vec{M}_a = \rho \frac{\pi d^3}{8} \cdot C_{m\sigma} \cdot V_r \cdot (\vec{V}_r \times \vec{x}_0) \quad (3.6)$$

Uzdužni prigušni moment - Uzdužni prigušni moment je moment koji se javlja kao rezultat viskozno trenja vazduha oko površine rotirajućeg projektila i ima tendenciju da zaustavi aksijalnu rotaciju. Intenzitet ovog momenta definisan je kao:

$$M_x = \frac{\rho \pi d^4}{16} \cdot C_{lp} \cdot p \cdot V_r \quad (3.7)$$

gdje je C_{lp} - bezdimenzionalni gradijent koeficijenta prigušnog uzdužnog momenta za referentnu ugaonu brzinu $p^* = \frac{pd}{2V_r}$. Pošto se ovaj moment suprotstavlja aksijalnoj rotaciji, njegov smjer je određen sa vektorom $-\vec{x}_0$. Vektorski predstavljen ovaj moment je:

$$\vec{M}_x = -\frac{\rho \pi d^4}{16} \cdot C_{lp} \cdot p \cdot V_r \cdot \vec{x}_0 \quad (3.8)$$

4. ODREĐIVANJE NUTACIONOG UGLA DINAMIČKE RAVNOTEŽE

Za određivanje aerodinamičkih sila i momenata u vektorskoj formi, neophodno je uvesti vektore koji u potpunosti opisuju kretanje projektila. Pravac i smjer kretanja određen je jediničnim vektorom $\vec{I} = \frac{\vec{V}_r}{V_r}$, koji polazi iz centra mase u smjeru vektora relativne brzine u odnosu na vazduh \vec{V}_r .

Orijentacija projektila definisana je jediničnim vektorom \vec{x}_0 duž njegove ose, usmjerenim ka vrhu.

Da bi se dobila odgovarajuća orijentacija za ovu veličinu, uvodi se slijedeći vektor:

$$\vec{\sigma}_d = \vec{I} \times (\vec{x}_0 \times \vec{I}) = \vec{x}_0 - \cos \sigma \cdot \vec{I} \quad (4.1)$$

Očigledno je da iz uslova ortogonalnosti slijedi $\vec{\sigma}_d \cdot \vec{I} = 0$ (tj. $\vec{\sigma}_d \perp \vec{I}$).

Pretpostavljamo da je brzina promjene nutacionog ugla $\dot{\sigma}$ zanemarljiva, što podrazumijeva da intenzitet $\dot{\sigma}$ ima veoma male vrijednosti.

Uz ovu pretpostavku diferenciranjem relacije (4.1) dobijamo slijedeću vezu:

$$\dot{\vec{x}}_0 = \cos \sigma \cdot \dot{\vec{I}} \quad (4.2)$$

Za određivanje nutacionog ugla dinamičke ravnoteže koristimo jednačinu kretanja (2.4). Obzirom da je poprečna ugaona brzina zanemarljiva u odnosu na aksijalnu, što implicira i zanemarivanje poprečne komponente momenta količine kretanja, to se ukupni moment količine kretanja može približno predstaviti kao :

$$\vec{K} = I_x p \cdot \vec{x}_0 \quad (4.3)$$

Jednačina (2.4) u datim uslovima sada glasi:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = I_x \frac{dp}{dt} \cdot \vec{x}_0 + I_x p \cdot \dot{\vec{x}}_0 = \vec{M}_a \quad (4.4)$$

Bлага promjena rotacije projektila duž putanje, koja je rezultat djelovanja prigušnog momenta M_x , ima za posljedicu to da je prva komponenta brzine promjene momenta količine kretanja zanemarljiva u odnosu na drugu, tako da je sada:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} \approx I_x p \dot{\vec{x}}_0 = \vec{M}_a \quad (4.5)$$

Prethodna pojednostavljenja izvršena su uz pretpostavku da važe slijedeći uslovi:

- Projektil je rotaciono tijelo kojem se geometrijska osa poklapa sa dinamičkom osom inercije;
- Projektil je dinamički stabilan ($S > 1$);
- Početni nutacioni ugao je mali i nema nikakvog značajnijeg uticaja na putanju.

Jednačina (4.5) sada glasi:

$$I_x p \cdot \dot{\vec{x}}_0 = \frac{\rho \pi d^3}{8} C_{m\sigma} \cdot V_r \cdot (\vec{V}_r \times \vec{x}_0)$$

Uvrštavanjem veza (4.1) i (4.2) slijedi:

$$I_x p \cdot \cos \sigma \cdot \dot{\vec{I}} = \frac{\rho \pi d^3}{8} C_{m\sigma} \cdot V_r \cdot [\vec{V}_r \times (\vec{\sigma}_d + \cos \sigma \cdot \vec{I})]$$

Pošto je $[\vec{V}_r \times (\vec{\sigma}_d + \cos \sigma \cdot \vec{I})] = \vec{I} \times \vec{\sigma}_d$, sada se vektorska jednačina transformiše u oblik :

$$\vec{\sigma}_d \times \vec{I} = -\frac{8 I_x p \cdot \cos \sigma}{\rho \pi d^3 C_{m\sigma} V_r^2} \cdot \dot{\vec{I}}$$

Koristeći osobinu skalarnog proizvoda ($\vec{\sigma}_d \perp \vec{I} \Rightarrow \vec{\sigma}_d \cdot \vec{I} = 0$), rješenje vektorske jednačine je:

$$\vec{\sigma}_d = -\frac{8 I_x p \cdot \cos \sigma}{\rho \pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \cdot (\vec{V}_r \times \dot{\vec{V}}_r) \quad (4.6)$$

Vektor relativne brzine u odnosu na vazduh određen je relacijom:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{W} \quad (4.7)$$

a relativno ubrzanje relacijom:

$$\dot{\vec{V}}_r = \dot{\vec{V}} - \dot{\vec{W}} \quad (4.8)$$

gdje su: $\vec{W}, \dot{\vec{W}}$ - vektor brzine i ubrzanja vjetra.

Iako je u realnim uslovima leta vjetar redovna pojava, njegov intenzitet i smjer zavise od trenutnog stanja u atmosferi. Rijetko se dešava da on brzo mijenja intenzitet u toku leta projektila, tako da možemo pretpostaviti da je uticaj $\dot{\vec{W}}$ beznačajan, tj. da je $\dot{\vec{V}}_r = \dot{\vec{V}}$.

Uz prethodnu pretpostavku, te uvodeći aproksimaciju $\cos \sigma \approx 1$, relacija (3.7) se svodi na:

$$\vec{\sigma}_d = -\frac{8 I_x p}{\rho \pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \cdot (\vec{V}_r \times \dot{\vec{V}}_r) \quad (4.9)$$

Osnovni cilj izvođenja izraza za približno određivanje nutacionog ugla dinamičke ravnoteže $\vec{\sigma}_d$ je formiranje matematičkog modela uključujući uticaj ovog ugla na prostorni oblik trajektorije projektila.

5. FORMIRANJE KONAČNOG SISTEMA JEDNAČINA

Sistem jednačina koji opisuje kretanje projektila se sastoji od:

- Jednačine kretanja centra masa projektila (2.2), koja kada se uvrste izrazi za sile glasi:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\rho \pi d^2}{8} (C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma_d^2) V_r \cdot \vec{V}_r + \frac{\rho \pi d^2}{8} C_{L\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \vec{\sigma}_d + m \vec{g} \quad (5.1)$$

- Procjene nutacionog ugla dinamičke ravnoteže:

$$\vec{\sigma}_d = -\frac{8 I_x p}{\rho \pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \cdot (\vec{V}_r \times \dot{\vec{V}}_r)$$

- Relativne brzine projektila u odnosu na vazduh:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{W}$$

- Položaja projektila u koordinatnom sistemu vezanom za Zemlju :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (5.2)$$

- Jednačine uzdužne rotacije projektila koja glasi:

$$I_x \frac{dp}{dt} \cdot \vec{x}_0 = -\frac{\rho \pi d^4}{16} \cdot C_{lp} \cdot p \cdot V_r \cdot \vec{x}_0 \quad (5.3)$$

U geodetskom koordinatnom sistemu vektor položaja projektila u prostoru (radijus vektor), vektor apsolutne brzine i ubrzanja su dati kao:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{V}_x \vec{i} + \dot{V}_y \vec{j} + \dot{V}_z \vec{k}$$

a vektor brzine vjetra:

$$\vec{W} = W_x \vec{i} + W_z \vec{k}$$

Komponenta W_y ravna je nuli, jer se pretpostavlja da nema vertikalnih strujanja u atmosferi.

Konačno možemo oformiti kompletan sistem skalarnih jednačina projektovanjem vektorskih jednačina na ose geodetskog koordinatnog sistema:

$$\dot{V}_x = -\frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot (C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma_d^2) \cdot V_r \cdot (V_x - W_x) + \frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot C_{L\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \left(-\frac{8I_x p}{\rho\pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \right) [V_y \cdot \dot{V}_z - (V_z - W_z) \dot{V}_y]$$

$$\dot{V}_y = -\frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot (C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma_d^2) \cdot V_r \cdot V_y + \frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot C_{L\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \left(-\frac{8I_x p}{\rho\pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \right) \cdot [(V_z - W_z) \dot{V}_x - (V_x - W_x) \dot{V}_z] - g$$

$$\dot{V}_z = -\frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot (C_{D0} + C_{D\sigma^2} \cdot \sigma_d^2) \cdot V_r (V_z - W_z) + \frac{\rho\pi d^2}{8m} \cdot C_{L\sigma} \cdot V_r^2 \cdot \left(-\frac{8I_x p}{\rho\pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \right) [(V_x - W_x) \dot{V}_y - V_y \cdot \dot{V}_x]$$

$$V_r = \sqrt{(V_x - W_x)^2 + V_y^2 + (V_z - W_z)^2} \quad (5.4)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\sigma_d = \left(-\frac{8I_x p}{\rho\pi d^3 C_{m\sigma} V_r^4} \right) \cdot \sqrt{[V_y \cdot \dot{V}_z - (V_z - W_z) \cdot \dot{V}_y]^2 + [(V_z - W_z) \cdot \dot{V}_x - (V_x - W_x) \cdot \dot{V}_z]^2 + [(V_x - W_x) \cdot \dot{V}_y - V_y \cdot \dot{V}_x]^2}$$

$$\dot{X} = V_x$$

$$\dot{Y} = V_y$$

$$\dot{Z} = V_z$$

$$\dot{p} = -C_{lp} \frac{\rho\pi d^4}{16I_x} \cdot V_r \cdot p$$

Sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje kretanje projektila nije moguće integrirati u opštem obliku izraženom kroz kombinaciju elementarnih funkcija. Razlog leži u tome što na desnim stranama diferencijalnih jednačina egzistiraju komponente aerodinamičkih sila, koje su složene nelinearne funkcije zavisne od više promjenjivih, a obično su zadate grafički ili tablično.

Partikularno rješenje sistema diferencijalnih jednačina, što predstavlja jednu putanju projektila, dobija se numeričkim integrisanjem metodom Runge-Kuta.

6. POREĐENJE EKSPERIMENTALNIH I TEORETSKIH REZULTATA

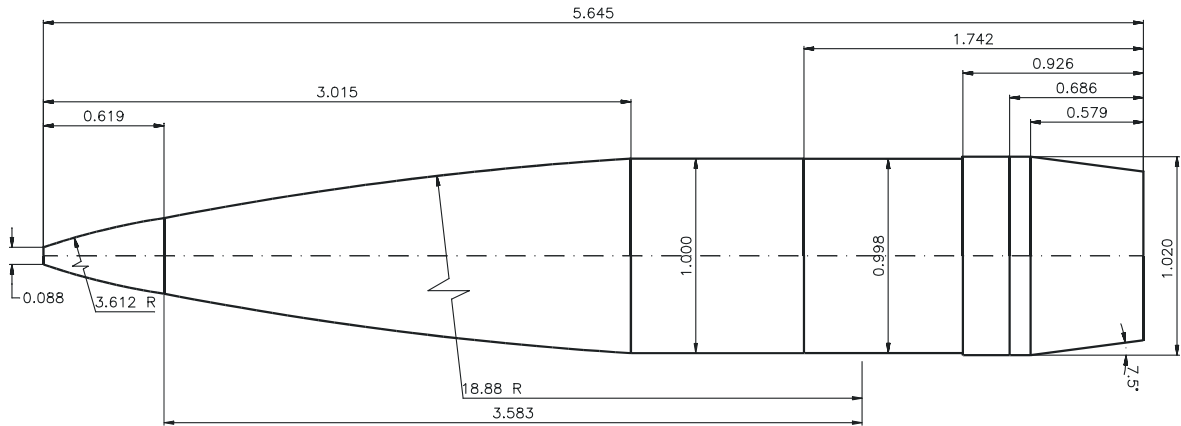
Da bismo testirali tačnost metode modifikovane materijalne tačke za određivanje putanje projektila upoređićemo rezultate dobivene tom metodom sa eksperimentalnim rezultatima, za aktivno-reaktivni artiljerijski projektil 155 mm M549A1.

Kao eksperimentalni rezultati koriste se podaci dobiveni ispaljivanjem grupe od 5 projektila 155 mm M549A1, s punjenjem XM201B2 (domet, skretanje udesno i početna brzina). Projektili su ispaljeni sa isključenim raketnim motorom, a opit je izveden na poligonu Tonopah Test Range u Nevadi, tokom oktobra 1977.

Svi projektili su ispaljeni iz cijevi topa M185 sa gasnom kočnicom. Elevacija topa je 45° na prosječnoj nadmorskoj visini poligona od 1630.4 m.

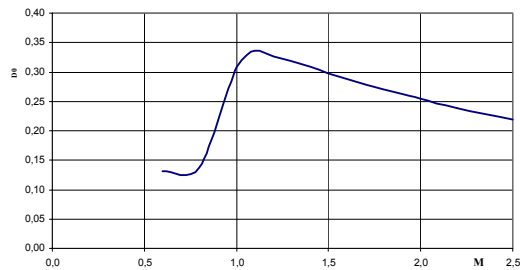
Pošto nema podataka o vjetru, za analizu će se kao referentne vrijednost koristiti srednji domet i srednje skretanje popravljenih vrijednosti za tabličnu početnu brzinu $V_0 = 610 \text{ m/s}$.

Srednji domet sveden na tabličnu početnu brzinu je 17701.6 m, standardna devijacija je 89.52 m a skretanje udesno je 380.4 m.

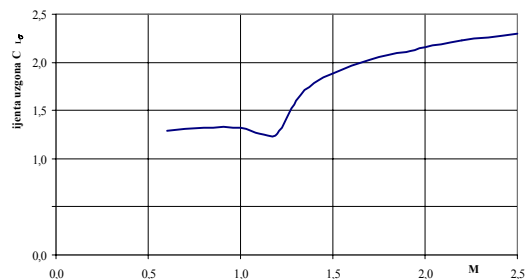


Sl.2 Projektil 155 mm M549A1 (mjere izražene u kalibrima)

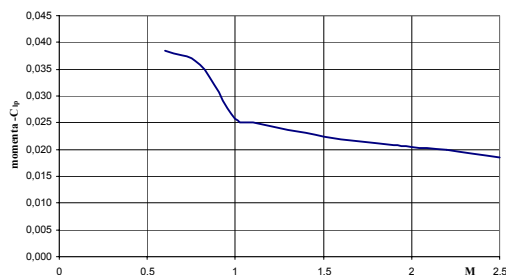
Aerodinamički koeficijenti, neophodni za proračun putanje, dobijeni proračunom poluempirijskim metodama za potreban dijapazon promjene Mach-ovog broja, prikazani su na slikama od 3 do 7.



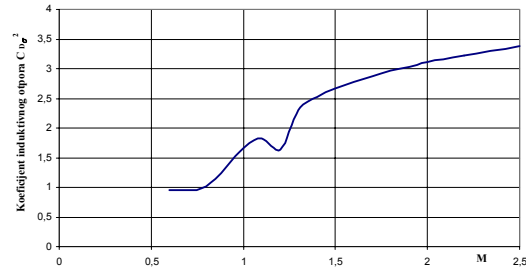
Sl.3 Koeficijent otpora pri nultom napadnim uglu



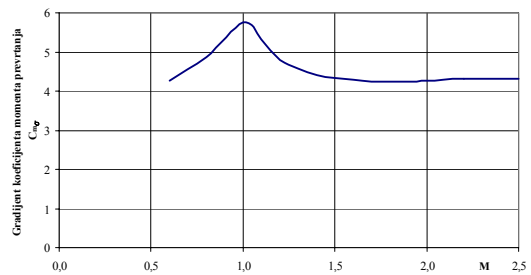
Sl.4 Gradijent koeficijenta uzgona



Sl.6 Gradijent koeficijenta prigušnog uzdužnog momenta



Sl.4 Koeficijent induktivnog otpora



Sl.5 Gradijent koeficijenta momenta prevrtanja

Metodom modifikovane materijalne tačke, za tabličnu početnu brzinu $V_0 = 610 \text{ m/s}$ i standardnu atmosferu ICAO, dobijen je domet 17529.5 m i skretanje 359.4 m.

Upoređujući dobivene rezultate sa eksperimentalnim može se ustanoviti da je greška manja od 1%, što predstavlja zadovoljavajuću tačnost modela (odstupanje u dometu je manje od 1%, a kod skretanja je ispod 0.75%).

7. ZAKLJUČAK

Model balističke putanje artiljerijskih brzorotirajućih projektila izložen u ovom radu omogućava veoma brzo određivanje svih relevantnih parametara trajektorije sa visokom tačnošću.

Prihvatljiv broj koeficijenata koji definišu aerodinamiku projektila, čini ovaj model pogodnim kako za fazu preliminarnog projektovanja tako i za izradu tablica gađanja.

Poređenjem modela modifikovane materijalne tačke sa Euler-ovim modelom i modelom putanje sa šest stepeni slobode kao najsloženijim, postiže se proračunska tačnost koja je bliska modelu šest stepeni slobode, uz približno dvostruko više proračunskog vremena u odnosu na Euler-ov model materijalne tačke, dok proračun po modelu šest stepeni slobode zahtijeva čak 100 do 1000 puta više proračunskog vremena, za isti korak integracije.

Poređenje dobijenih teoretskih i eksperimentalnih rezultata najbolje ilustruje tačnost metode, pri upotrebi tokom faze projektovanja novog projektila.

Pri izradi tablica gađanja, u cilju usklađivanja proračunskih i izmjerenih vrijednosti dometa i skretanja, u jednačine modela se uvode dodatni koeficijenti fitovanja, kojima se neutrališe neizbježno odstupanje kao posljedica nesavršenosti metoda predviđanja aerodinamočkih koeficijenata.

8. LITERATURA

- 1 M. Gajić, i J. Viličić.: Balistika, Vojnoizdavački zavod, Beograd 1978.
- 2 S. Janković: Aerodinamika projektila, Mašinski fakultet u Beogradu 1979.
- 3 S. Janković: Mehanika leta projektila, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1998.
- 4 S. Janković: Spoljna balistika, Vojnoizdavački zavod, Beograd 1977.
- 5 R. F. Lieske i R. L. McCoy: Equations of Motion of a Rigid Projectile, BRL Report No. 1244, 1964.
- 6 R. L. McCoy: "MC DRAG"- A Computer Program for Estimating the Drag Coefficients of Projectil, Ballistic research laboratory, 1981.
- 7 E. J. McShane, J. L. Kelley i F. Reno: Exterior Ballistics, University of Denver Press, 1953.
- 8 F. G. Moore: Body Alone Aerodynamics of Guided and Unguided Projectiles at Subsonic, Transonic and Supersonic Mach Numbers, Naval weapons laboratory, Dahlgren, Virginia, 1973.
- 9 Z. Pekić: Model za simulaciju putanja žirostabilisanih artiljerijskih projektila, UNIS Institut, Sarajevo, 1986.