

**BOSNA I HERCEGOVINA
UNIVERZITET U SARAJEVU
MAŠINSKI FAKULTET U SARAJEVU**

Sabina Serdarević-Kadić

**PREDVIĐANJE SILE OTPORA PRI NULTOM
NAPADNOM UGLU ZA OSNOSIMETRIČNU
BRZOROTIRAJUĆU KONFIGURACIJU
PROJEKtila**

– Magistarski rad –

Sarajevo, juli 2007 godine

**BOSNA I HERCEGOVINA
UNIVERZITET U SARAJEVU
MAŠINSKI FAKULTET U SARAJEVU**

**PREDVIĐANJE SILE OTPORA PRI NULTOM
NAPADNOM UGLU ZA OSNOSIMETRIČNU
BRZOROTIRAJUĆU KONFIGURACIJU
PROJEKtila**

– Magistarski rad –

Mentor:
Vanredni prof. dr. Berko Zečević

Autor:
Sabina Serdarević-Kadić

Sarajevo, juli 2007 godine

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

Broj dokumenta:	Datum dokumenta: Juli 2007.	Tip dokumenta: Magistarski rad	
Naslov: Predviđanje sile otpora pri nultom napadnom uglu za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila		UDK:	
Autor: Sabina Serdarević-Kadić, dipl. ing. maš.			
Mentor: Vanredni profesor dr. Berko Zečević			
Institucija u kojoj je dokument urađen/pohranjen i adresa: Univerzitet u Sarajevu Mašinski fakultet u Sarajevu Wilsonovo šetalište 9, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina			
Distribucija/raspoloživost dokumenta:			
Sažetak: Na osnovu dostupnih eksperimentalnih podataka i teoretskih metoda izvršeno je poboljšanje postojećih metoda predviđanja aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile, (sile otpora pri nultom napadnom uglu) u sklopu modela „BODY“ u subsoničnom, transoničnom i supersoničnom području. Postavljen je sopstveni model, nazvan OTPOR, za predviđanje aksijalne sile za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila, u kojem je zadržana struktura modela BODY uz modifikaciju modula koji se odnose na aksijalnu silu prednjeg dijela, aksijalnu silu zadnjeg dijela i aksijalnu silu dna. Model je dopunjena i modulom za predviđanje aksijalne sile vodećeg prstena. Poređenjem rezultata ovog modela sa eksperimentalnim rezultatima za nekoliko konfiguracija, ukazano je da se sa tačnošću većom od 90% može predvidjeti sila otpora pri nultom napadnom uglu za većinu konfiguracija projektila.			
Ključne riječi: Koeficijent otpora, otpor uslijed pritiska, otpor trenja, bazni otpor, osnosimetrični projektil, subsonika, transonika, supersonika, model predviđanja			
Naučno područje: Tehničke nauke		Naučno polje: Odbambene tehnologije, Aerodinamika	
Broj stranica: 130	Broj slika: 135	Broj tabela:	Broj korištenih bibliografskih jedinica: 47
Komisija: Redovni profesor dr. Vlatko Doleček - predsjednik Vanredni profesor dr. Berko Zečević Vanredni profesor dr. Ejub Džaferović			

PREDGOVOR

U Bosni i Hercegovini, do danas, nije bilo značajnijih pokušaja u definisanju modela za predviđanje aerodinamičkih performansi projektila. Glavni model za osnosimetrične projektile, na prostoru bivše Jugoslavije, je model BODY prof. dr. sc. Slobodana Jankovića.

Poređenjem rezultata ovog modela sa eksperimentalnim rezultatima i dostupnim rezultatima drugih modela u svijetu utvrđeno je značajno odstupanje u vrijednostima koeficijenta aksijalne sile u transoničnom i supersoničnom području.

Iz tog razloga, na osnovu teoretskih razmatranja i analizom dostupnih modela, izvršeno je poboljšanje postojećih metoda za predviđanje aksijalne sile korištenih u modelu BODY. Postavljen je sopstveni model za predviđanje sile otpora pri nultom napadnom uglu za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila nazvan OTPOR, u kojem je zadržana algoritamska struktura modela BODY uz izmjenu modula za određivanje koeficijenta aksijalne sile prednjeg dijela, koeficijenta aksijalne sile zadnjeg dijela i koeficijenta aksijalne sile dna, i dodavanje modula za proračun koeficijenta aksijalne sile vodećeg prstena.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svima koji su mi pomogli u realizaciji ovog magistarskog rada.

Duboku zahvalnost izražavam prije svega svom mentoru, vanrednom profesoru dr. Berku Zečeviću, za profesionalno vođenje i nesebičnu podršku tokom stvaranja ove teze.

Takođe sam zahvalna članovima komisije:

- Redovnom profesoru dr. Vlatku Dolečeku
- Vanredni profesor dr. Ejubu Džaferoviću

na stručnim sugestijama i podršci u definitivnom oblikovanju rada.

Posebnu zahvalnost dugujem porodici koja mi je bila potstrek da istrajem u svom radu.

Autor

SADRŽAJ

Oznake	I
Spisak slika	V
Rezime	XI
Summary	XIII
1. Uvod	1
2. Dosadašnja istraživanja	7
2.1 Koeficijent otpora uslijed pritiska	12
2.1.1 Subsonično opstrjavanje	12
2.1.1.1 Parcijalna diferencijalna jednačina potencijala poremećene brzine	12
2.1.1.2 Linearizacija jednačine potencijala poremećaja	14
2.1.1.3 Princip rješavanja	15
2.1.1.4 Granični uslovi za potencijal poremećaja	16
2.1.2 Transonično opstrujavanje	17
2.1.2.1 Teorija malih poremećaja	18
2.1.2.2 Tačno rješenje za osnosimetrični transonični tok	20
2.1.2.3 Granični uslovi	21
2.1.2.4 Koeficijent pritiska	21
2.1.3 Supersonično opstrujavanje	22
2.1.3.1 Konusni udarni talas	23
2.1.3.1.1 Diferencijalne jednačine i granični uslovi	24
2.1.3.2 Metode za određivanje koeficijenta pritiska	26
2.1.3.2.1 Metod karakteristika	26
2.1.3.2.2 Van Dyke-ova teorija	33
2.1.3.2.3 Udar-ekspanzija teorija drugog reda	37
2.2 Trenje	39
2.2.1 Osnovne postavke nestišljivog graničnog sloja	39
2.2.2 Nestišljivi laminarni granični sloj	39
2.2.3 Rješenje pomoću strujne funkcije - Falkner-Skan jednačina	40
2.2.4 Tranzicija	44
2.2.5 Nestišljivi turbulentni granični sloj	45
2.2.6 Integralna jednačina turbulentnog graničnog sloja	47
3. Cilj i objekt istraživanja	51
3.1 Otpor prednjeg dijela uslijed pritiska	55
3.2 Otpor zadnjeg dijela uslijed pritiska	59
3.3 Otpor trenja	60
3.4 Otpor dna	60

4. Metode istraživanja	65
4.1 Model BODY	66
4.2 Model MCDRAG	69
4.2.1 Koeficijent otpora prednjeg dijela	70
4.2.2 Koeficijent otpora zadnjeg dijela	71
4.2.3 Koeficijent otpora pritiska za vodeći prsten	72
4.2.4 Koeficijent otpora trenja	73
4.2.5 Koeficijent baznog otpora	74
4.3 Aeroprediction Code 72 (AP72)	75
4.3.1 Talasni otpor	75
4.3.1.1 Supersonični tok	75
4.3.1.2 Transoničan tok	77
4.3.2 Otpor trenja	78
4.3.3 Otpor dna	79
4.3.4 Komparacija modela	80
5. Rezultati istraživanja	85
5.1 Model za predviđanje otpora	85
5.1.1 Notacija	86
5.1.2 Proračun koeficijenta otpora prednjeg dijela	87
5.1.3 Proračun otpora zadnjeg dijela projektila	90
5.1.4 Proračun otpora vodećeg prstena	96
5.1.5 Proračun otpora dna	97
5.1.6 Predviđanje otpora trenja projektila	100
5.2 Testiranje	101
5.2.1 Projektil 7.62mm M80 – mali kalibar	101
5.2.2 Projektil 30mm M789 – srednji kalibar	105
5.2.3 Projektili velikog kalibra	108
5.2.3.1 Projektil 105mm M1	108
5.2.3.2 Projektil 155mm M483A1	111
5.2.3.3 Projektil 155mm M549	114
6. Diskusija	119
6.1 Projektil 7.62mm M80	119
6.2 Projektil 30mm M789	120
6.3 Projektil 105mm M1	121
6.4 Projektil 155mm M483A1	123
6.5 Projektil 155mm M549	126
7. Zaključak	129
LITERATURA	131

Oznake

Simbol	Opis simbola
a	brzina zvuka
c	dužina opstrujavanja
C_A	aerodinamički koeficijent aksijalne sile
C_D	aerodinamički koeficijent otpora
C_{DS}	Siacci-ev etalon
C_{Df}	“Garnier-Dupuis” funkcije otpora
C_N	aerodinamički koeficijent normalne sile
C_M	aerodinamički koeficijent momenta propinjanja
C_p	koeficijent pritiska
d, D	kalibar projektila
F	sila
$g(x)$	neprekidna funkcija koja nestaje za $x \leq 0$.
i	koeficijent oblika
j	parametar familije
K	radijus krivine
k	faktor obnavljanja pritiska zadnjeg dijela
l	dužina projektila
M_∞	Mach-ov broj slobodne struje vazduha
M	Mach-ov broj, moment
P	površina omotača
P_r	Prandtl-ovog broja
p	pritisak
q_∞	referentni pritisak
R	radijus ozivila
Re	Reynolds-ov broj
s	put na omotaču
S	površina
T	temperatura
u, v, w	komponente poremećene brzine
V	brzina opstrujavanja
x, r, θ	cilindrične koordinate
α	napadni ugao, konstanta integracije
β	ugao zadnjeg konusa

γ	adijabatski eksponent
δ	debljina graničnog sloja
δ^*	debljina istiskivanja
φ	potencijal poremećaja prvog reda
λ	konstanta separacije, vitkost projektila
χ	dopunska funkcija
ε	parametar koji je mali u poređenju sa jedinicom, ugao nagiba tangente
ξ	funkcija samo od x
η	funkcija samo od r
μ	koeficijent viskoznosti
μ_c	poluugao Mach-ovog konusa
ρ	gustina vazduha
ϑ_c	ugao konusa
ϑ_s	ugao konusnog udarnog talasa
ψ	partikularni integral
ϕ	potencijal poremećaja drugog reda
ν	kinematska viskoznost
τ	tangencijalni napon

Indeksi donji

A	aksijalni
a	zadnji dio
B	baza, dno
BT	zadnji dio
c	konus
cyl	cilindar, srednji dio
D	otpor
f	upaljač, trenje
m	zatupljenje
N	prednji dio
n	prednji ožival
o	ožival
rb	vodeći prsten
ref	referentni
s	zaobljenje
so	sekantni ožival
SF	trenje

to	tangentni ožival
β	zadnji konus
0	pri nultom napadnom uglu
43	etalon iz 1943.
58	etalon iz 1958.
∞	neporemećen tok

Spisak slika

Redni broj	Naziv slike	Strana
1.	S1. 1.1 Razni tipovi projektila	1
2.	S1. 1.2 Komponente aerodinamičke sile i momenta	2
3.	S1. 1.3 Osnosimetrični brzorotirajući artiljerijski projektil 155mm M107	4
4.	S1. 2.1 Siacci-ev etalon	7
5.	S1. 2.2 Oblik projektila za koji su određene etalon funkcije	8
6.	S1. 2.3 Francuski etaloni $C_{Df}(M, j)$ za razne vrijednosti parametra "j" i ruski etalon $C_{D43}(M)$ [12]	9
7.	S1. 2.4 Aksijalna sila, normalna sila i moment propinjanja	11
8.	S1. 2.5 Opstrujavanje projektila pri $M = 0.8$ [43]	12
9.	S1. 2.6 Komponente neporemećene brzine	14
10.	S1. 2.7 Granični uslovi na tijelu	17
11.	S1. 2.8 Transonično opstrujavanje [43]	17
12.	S1. 2.9 Supersonično opstrujavanje [43]	23
13.	S1. 2.10 Opstrujavanje konusa supersoničnom strujom vazduha [45]	24
14.	S1. 2.11 Komponente brzine ispred i iza konusnog udarnog talasa [45]	25
15.	S1. 2.12 Osnosimetrično opstrujavanje rotacionog tijela [45]	27
16.	S1. 2.13 Poremećaj u jednoj tački prostora	27
17.	S1. 2.14 Pomjeranje iza udarnog talasa [45]	29
18.	S1. 2.15 Karakteristike tri tačke [45]	30
19.	S1. 2.16 Metod karakteristika kod oživila [45]	31
20.	S1. 2.17 Veza između polarnih i cilindričnih koordinata	32
21.	S1. 2.18 Osnosimetrično opstrujavanje rotacionog tijela (dvodimenzionalno)	33
22.	S1. 2.19 Metod rješavanja za glatka tijela [27]	36
23.	S1. 2.20 Površina tijela aproksimirana tijelima koja tangiraju originalno tijelo [14]	37
24.	S1. 2.21 Tok oko konusnog elementa [14]	38
25.	S1. 2.22 Zakrivljeni granični sloj [44]	39
26.	S1. 2.23 Profil brzine u graničnom sloju	40
27.	S1. 2.24 Zavisnost Re_t o hrapavosti na ravnoj površini normalne temperature za razne Mach-ove brojeve vanjske brzine opstrujavanja [11]	45
28.	S1. 2.25 Elementarna površina paralelna x osi	46
29.	S1. 2.26 Profil brzina u laminarnom i turbulentnom graničnom sloju [44]	49
30.	S1. 2.27 Zavisnost koeficijenta trenja od Reynolds-ovog broja [44]	50
31.	S1. 3.1 Rotaciono tijelo	51

32.	Sl. 3.2	Element bočne površine tijela	52
33.	Sl. 3.3	Udio pojedinih komponenata koeficijenta otpora [47]	54
34.	Sl. 3.4	Komponente osnosimetričnog projektila	55
35.	Sl. 3.5	Složeni prednji dio – zaobljeni konus	55
36.	Sl. 3.6	Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za razne eliptičke oblike prednjeg dijela [1]	56
37.	Sl. 3.7	Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za prednji dio oblika konusa [1]	57
38.	Sl. 3.8	Složeni prednji dio – zaobljeni parabolni prednji dio	57
39.	Sl. 3.9	Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za parabolni prednji dio [1]	58
40.	Sl. 3.10	Zadnji dio projektila oblika zarubljenog konusa	59
41.	Sl. 3.11	Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za konusni zadnji dio [11]	59
42.	Sl. 3.12	Shema supersoničnog opstrujavanja dna projektila [30]	61
43.	Sl. 3.13	Zavisnost koeficijenta srednjeg baznog pritiska od Mach-ovog broja [20]	62
44.	Sl. 3.14	Koeficijent pritiska na dno projektila [1]	62
45.	Sl. 3.15	Popravni koeficijent k_d u funkciji parametra zadnjeg konusa i Mach-ovog broja [11]	63
46.	Sl. 4.	Razlike između testova na poligonu i testova u vazdušnom tunelu [21]	65
47.	Sl. 4.1	Ulazni podaci za program BODY	67
48.	Sl. 4.2	Udio različitih komponenata otpora [16]	70
49.	Sl. 4.3	Priraštaj koeficijenta otpora za vodeći prsten [16]	72
50.	Sl. 4.4	Transonični talasni otpor tangentnog oživila [20]	77
51.	Sl. 4.5	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu projektila 155 mm M483A1 (konfiguracije: upaljač – ožival – cilindar - konus)	80
52.	Sl. 4.5a	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil 155 mm M483A1 (konfiguracije: upaljač – ožival – cilindar - konus)	81
53.	Sl. 4.5b	Koeficijent otpora prednjeg dijela projektila velikog kalibra 155 mm M483A1 (konfiguracije: zatupljeni upaljač - ožival)	81
54.	Sl. 4.5c	Koeficijent otpora zadnjeg dijela, oblika konusa, za projektil 155 mm M483A1	82
55.	Sl. 4.5d	Koeficijent otpora dna za projektil 155 mm M483A1	82
56.	Sl. 4.5e	Koeficijent otpora trenja za projektil 155 mm M483A1	83
57.	Sl. 5	Dijagram toka programa OTPOR	85
58.	Sl. 5.1	Ulazni podaci za program OTPOR	86
59.	Sl. 5.2	Primjer ulazne datoteke CONFIG.DAT za projektil 155 mm M483A1	87

60.	S1. 5.3	Dijagram toka modula za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora prednjeg dijela	88
61.	S1. 5.4	Tipični oblici prednjeg dijela	89
62.	S1. 5.5	Konusni zadnji dio	90
63.	S1. 5.5a	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.6$ [2]	90
64.	S1. 5.5b	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.8$ [2]	91
65.	S1. 5.5c	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.9$ [2]	91
66.	S1. 5.5d	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.0$ [2]	92
67.	S1. 5.5e	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.1$ [2]	92
68.	S1. 5.5f	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.2$ [2]	93
69.	S1. 5.5g	Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.3$ [2]	93
70.	S1. 5.6	Korelacija koeficijenta otpora zadnjeg dijela sa parametrom sličnosti pri supersoničnim brzinama [16]	95
71.	S1. 5.7	Dijagram toka modula za određivanje koeficijenta otpora zadnjeg dijela	95
72.	S1. 5.8	Priraštaj aksijalne sile za visinu vodećeg prstena od 0.01 kalibar [16]	96
73.	S1. 5.9a	Koeficijent baznog pritiska za projektil sa konusnim zadnjim dijelom pri $M = 0.6$ [2]	97
74.	S1. 5.9b	Koeficijent baznog pritiska za projektil sa konusnim zadnjim dijelom pri $M = 0.8$ [2]	98
75.	S1. 5.9	Dijagram toka modula za određivanje otpora dna	99
76.	S1. 5.10	Dijagram toka modula za određivanje koeficijenta otpora trenja projektila	101
77.	S1. 5.11	Projektil 7.62 mm M80	101
78.	S1. 5.11a	Geometrijske karakteristike projektila 7.62 mm M80	102
79.	S1. 5.11b	Ulazna datoteka CONFIG.DAT programa OTPOR za projektil 7.62 mm M80	102
80.	S1. 5.11c	Izlazna datoteka AERO.TAB programa OTPOR za projektil 7.62 mm M80	103
81.	S1. 5.11d	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80	103
82.	S1. 5.11e	Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80	104
83.	S1. 5.11f	Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80	104
84.	S1. 5.11g	Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80	105
85.	S1. 5.11h	Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80	105
86.	S1. 5.12	Projektil 30 mm M789	105

87.	Sl. 5.12a	Geometrijske karakteristike projektila 30 mm M789	106
88.	Sl. 5.12b	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	106
89.	Sl. 5.12c	Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	107
90.	Sl. 5.12d	Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	107
91.	Sl. 5.12e	Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	107
92.	Sl. 5.12f	Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	108
93.	Sl. 5.12g	Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789	108
94.	Sl. 5.13	Projektil 105 mm M1	108
95.	Sl. 5.13a	Geometrijske karakteristike projektila 105 mm M1	109
96.	Sl. 5.13b	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	109
97.	Sl. 5.13c	Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	110
98.	Sl. 5.13d	Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	110
99.	Sl. 5.13e	Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	110
100.	Sl. 5.13f	Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	111
101.	Sl. 5.13g	Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1	111
102.	Sl. 5.14	Projektil 155 mm M483A1	111
103.	Sl. 5.14a	Geometrijske karakteristike projektila 155 mm M483A1	112
104.	Sl. 5.14b	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	112
105.	Sl. 5.14c	Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	113
106.	Sl. 5.14d	Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	113
107.	Sl. 5.14e	Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	113
108.	Sl. 5.14f	Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	114
109.	Sl. 5.14g	Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1	114
110.	Sl. 5.15	Projektil 155 mm M549	114

111.	Sl. 5.15a	Geometrijske karakteristike projektila 155 mm M549	115
112.	Sl. 5.15b	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	115
113.	Sl. 5.15c	Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	116
114.	Sl. 5.15d	Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	116
115.	Sl. 5.15e	Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	116
116.	Sl. 5.15f	Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	117
117.	Sl. 5.15g	Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549	117
118.	Sl. 6.1	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil malog kalibra 7.62 mm M80	119
119.	Sl. 6.2	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil srednjeg kalibra 30 mm, XM789	120
120.	Sl. 6.2a	Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil malog kalibra 30 mm M789	121
121.	Sl. 6.3	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 105 mm M1	121
122.	Sl. 6.3a	Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil velikog kalibra 105 mm M1	122
123.	Sl. 6.3b	Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil velikog kalibra 105 mm M1	122
124.	Sl. 6.3c	Koeficijent otpora dna za projektil velikog kalibra 105 mm M1	123
125.	Sl. 6.3d	Koeficijent otpora trenja za projektil velikog kalibra 105 mm M1	123
126.	Sl. 6.4	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 155 mm M483A1	124
127.	Sl. 6.4a	Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil 155 mm M483A1	124
128.	Sl. 6.4b	Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil 155 mm M483A1	125
129.	Sl. 6.4c	Koeficijent otpora dna za projektil 155 mm M483A1	125
130.	Sl. 6.4d	Koeficijent otpora trenja za projektil 155 mm M483A1	126
131.	Sl. 6.5	Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 155 mm M549	126
132.	Sl. 6.5a	Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil velikog kalibra 155 mm M549	127
133.	Sl. 6.5b	Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil velikog kalibra 155 mm M549	127
134.	Sl. 6.5c	Koeficijent otpora dna za projektil velikog kalibra 155 mm M549	128
135.	Sl. 6.5d	Koeficijent otpora trenja za projektil velikog kalibra 155 mm M549	128

REZIME

Sva nastojanja u usavršavanju projektila usmjerena su ka povećanju dometa, povećanju efikasnosti na cilju i smanjenju cijene. Domet projektila je direktno uslovljen silom otpora koja nastaje pri kretanju projektila kroz vazduh.

Na osnovu dostupnih eksperimentalnih podataka i teoretskih metoda izvršeno je poboljšanje postojećih metoda predviđanja aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile, (sile otpora pri nultom napadnom uglu) u sklopu modela „BODY“ u subsoničnom, transoničnom i supersoničnom području.

Postavljen je sopstveni model, nazvan OTPOR, za određivanje aksijalne sile osnosimetričnog brzorotirajućeg projektila, u kojem je zadržana struktura modela BODY uz modifikaciju modula koji se odnose na aksijalnu silu prednjeg dijela, aksijalnu silu zadnjeg dijela i aksijalnu silu dna. Model je dopunjen i modulom za predviđanje aksijalne sile vodećeg prstena.

Poređenjem ovog metoda sa eksperimentima za nekoliko konfiguracija, ukazano je da se sa tačnošću većom od 90% može predvidjeti sila otpora pri nultom napadnom uglu za većinu konfiguracija projektila.

Ključne riječi:

Koeficijent otpora, otpor uslijed pritiska, otpor trenja, bazni otpor, osnosimetrični projektil, subsonika, transonika, supersonika, model predviđanja

SUMMARY

Projectile development is concentrated on range increasing, efficiency increasing and cost decreasing. Projectile range is directly limited by drag which is a result of projectile moving through air.

Improvement of methods for predicting the axial force coefficient (zero yaw drag coefficient) in model BODY at subsonic, transonic and supersonic regime is made on the basis of accessed experimental data and theoretical methods.

Model, called OTPOR, for predicting the axial force coefficient on axisymmetric gyro-stabilized projectile is established. In the model is retained structure of model BODY with modification of modules concerning to nose axial force, boat-tail axial force and base drag. A module for predicting rotating band axial force is added to the model.

The model is compared with experiment data for a few projectile configurations. Conclusion is that zero yaw drag coefficient can be predicted with accuracy more than 90% for the most configurations of projectile.

Key words:

Drag coefficient, wave drag, skin friction drag, base drag, axisymmetric projectile, subsonic, transonic, supersonic, model for predicting

1. Uvod

Razvoj novih odbrambenih tehnologija i sve šira primjena koncepta vođenja oružanih operacija niskog intenziteta, u urbanim sredinama, iziskuju primjenu oružanih sistema visoke preciznosti i tačnosti, odnosno posjedovanja znanja i hardvera koji osiguravaju sposobnost što tačnijeg gađanja površinskih ciljeva. U skladu s takvom praksom, pred dizajnere municije se postavljaju sve složeniji zadaci u cilju ostvarivanja, često kontradiktornih, zahtjeva koji se odnose na dizajniranje projektila sa dobrom aerodinamičkim performansama i postizanje visoke smrtonosne efikasnosti na cilju. Optimalni dizajn projektila zahtjeva sposobnost predviđanja ponašanja projektila tokom njegovog kretanja kroz atmosferu, uzimajući u obzir sve parametre koji mogu utjecati na rasturanje na cilju.

Oružani sistemi se dizajniraju tako da imaju sposobnost da unište ili onesposobe neprijateljske ciljeve. Ciljevi se mogu rangirati od široko raspoređenih formacijskih trupa do tačkastih ciljeva, kao što su dolazeća raketa, udaljeni avion ili oklopno vozilo. Takođe, mogu uključivati zgrade i druge velike strukture od vojnog značaja.

Na osnovu identifikacije cilja, njegovog položaja i karakteristika, određuje se tip projektila kojim će se izvršiti onesposobljavanje, odnosno uništenje cilja.



Slika 1.1: Razni tipovi projektila

Na kretanje projektila utiče veliki broj faktora, od kojih su neki određeni konstruktivnim karakteristikama projektila, drugi definišu sredinu kroz koju se kretanje odvija (gustina vazduha, temperatura, pritisak, viskoznost i brzina vjetra), a treći početne uslove kretanja.

Konstruktivne karakteristike projektila (masa, oblik, kalibr i aksijalna ugaona brzina) treba da omoguće da, pod određenim uslovima, projektil ima zahtjevane karakteristike leta (domet, rasturanje itd.) i predviđeno dejstvo na cilju.

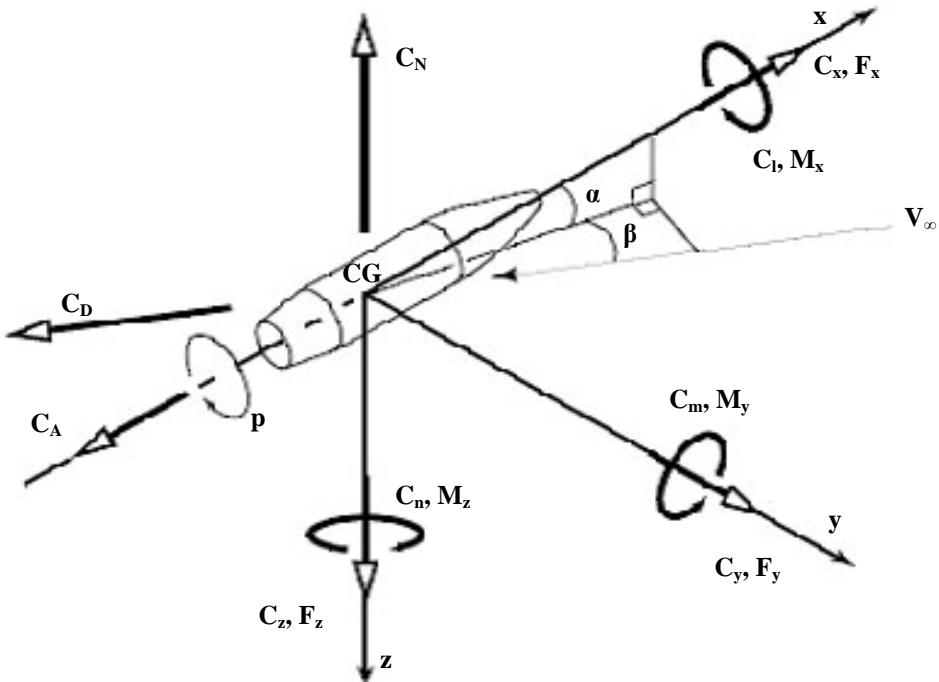
Kretanje projektila odvija se u atmosferi pa je potrebno proučiti karakteristike atmosfere i utvrditi načine na koje one mogu da se prilagode proračunima koji se vrše u toku leta projektila.

Pri gađanju sa projektilima istog tipa, istog težinskog znaka, istog punjenja, sa istom elevacijom, u istom pravcu i pri gađanju bez prekida, u meteorološkim uslovima koji se minimalno razlikuju od projektila do projektila, putanje projektila (na jednoj putanji je samo jedan projektil) se ne poklapaju, već čine tzv. snop putanja. Ovaj snop putanja je posljedica razlika onih uslova koje ne možemo da održavamo istim. To su, na prvom mjestu, različiti početni uslovi kretanja oko težišta, zatim razlike u početnoj brzini, različite težine projektila u granicama jednog težinskog znaka, kao i različit vjetar, po vremenu i prostoru, duž putanje od projektila do projektila.

Na početnu brzinu projektila utiče više faktora, kao što su: nehomogenost barutnog punjenja i barutnih zrna, tolerancije u dimenzijama barutnih zrna, razlike tvrdoće vodećeg prstena i načina urezivanja, specifičnost kretanja kroz cijev, nehomogenost pripaljivanja itd.

Eksperimentalno je ustanovljeno da se pravac početne brzine ne poklapa sa pravcem ose cijevi poslije nišanjenja, a pri izlasku projektila iz cijevi. Odskočni ugao (ugao na ustima cijevi koji zaklapaju pravac brzine i pravac ose cijevi) ima vertikalnu i bočnu komponentu. Za jedno dato oruđe, odskočni ugao zavisi od elevacionog ugla, početne brzine i težine projektila.

Poslije izlaska projektila iz cijevi i prestanka dejstva barutnih gasova, projektil pod uticajem sile Zemljine teže i ukupne aerodinamičke sile vrši složeno kretanje koje se sastoji od kretanja centra mase i kretanja oko centra mase. Ukupna aerodinamička sila koja nastaje uslijed dejstva vazduha na projektil, koji se kreće, ne djeluje u centru mase, pa se dejstvo vazduha na projektil može zamjeniti dejstvom jedne aerodinamičke sile i jednog momenta za centar mase projektila. Ta aerodinamička sila i taj aerodinamički moment imaju po tri komponente u jednom od koordinatnih sistema, npr. za koordinatni sistem vezan za projektil te komponente su: aksijalna sila \mathbf{F}_A ($\vec{F}_A = -\vec{F}_x$), Magnusova sila \mathbf{F}_Y i normalna sila \mathbf{F}_N ($\vec{F}_N = -\vec{F}_z$), moment valjanja \mathbf{M}_X , moment propinjanja \mathbf{M}_Y i moment skretanja (Magnusov moment) \mathbf{M}_Z .



Slika 1.2: Komponente aerodinamičke sile i momenta

U praksi se umjesto komponenata sile i momenta primjenjuju bezdimenzionalne veličine nazvane aerodinamički koeficijenti, a koje se dobiju dijeljenjem komponente aerodinamičke sile

sa referentnom silom, odnosno komponente aerodinamičkog momenta sa referentnim momentom. Referentna sila i referentni moment nisu jednoznačno određene, tj. definišu se za svaki projektil posebno.

Referentna sila je proizvod referentnog pritiska i referentne površine, a referentni moment je proizvod te referentne sile i referentne dužine.

Referentni pritisak je dinamički pritisak izračunat sa aerodinamičkom brzinom, odnosno brzinom opstrujavanja (aerodinamička brzina i brzina opstrujavanja su jednake po intenzitetu, ali su suprotnog smjera):

$$q_{\infty} = \frac{\rho \cdot V^2}{2} \quad (1.1)$$

Referentna površina je površina kruga prečnika kalibra:

$$S_{ref} = \frac{d^2 \pi}{4} \quad (1.2)$$

Referentna dužina jednaka je kalibru, osim za ugaonu brzinu oko uzdužne ose kada se uzima pola kalibra.

Tokom kretanja projektil teži da se u odnosu na vazdušnu struju postavi u položaj tako da ima najmanji otpor vazduha, odnosno da mu se vektor brzine i osa uzdužne simetrije poklope. Od tog položaja projektil malo odstupa i uglovi između vektora brzine i uzdužne ose simetrije ostaju mali. Ovo zavisi od stabilnosti projektila, odnosno od sposobnosti da i pored poremećaja zadrži ugao između vektora brzine i ose simetrije u dovoljno malim granicama.

Kretanje projektila ima kritičnu zonu u onom opsegu brzina gdje egzistiraju i subsonični i supersonični tipovi toka, dakle u transoničnom području.

Strujno polje se definiše kao subsonično ukoliko je Mach-ov broj u svakoj tački manji od jedan ($M < 1$). Subsonična strujanja imaju glatke strujnice, bez skokovitih promjena u nagibu. Budući da je brzina strujanja u svakoj tački manja od brzine zvuka, poremećaji u struci se šire u svim smjerovima i utječu na cijelo strujno polje. Mach-ov broj slobodne struje vazduha, M_{∞} , manji od jedan, ne mora značiti i potpuno subsonično strujanje preko cijelog tijela. Pri prolasku preko tijela, brzina strujanja se povećava iznad brzine slobodne struje, i ako je M_{∞} dovoljno blizu jedinice, lokalni Mach-ov broj može narasti iznad jedan u određenim područjima struje. Općenito se uzima da $M_{\infty} < 0,8$ osigurava subsonično strujanje preko tankih, zaobljenih tijela. Za debela, tupa tijela M_{∞} mora biti još manji da bi se osiguralo potpuno subsonično strujanje.

Ukoliko je M_{∞} blizu jedan, strujanje može lokalno postati supersonično ($M > 1$). Na gornjoj i donjoj površini tijela pojavljuju se "džepovi" sa supersoničnim strujanjem, koji prestaju kroz slabe udarne talase iza kojih strujanje opet postaje subsonično. Ako se M_{∞} poveća malo iznad jedan, nastaje zaobljeni normalni udarni talas ispred tijela; iza udarnog talasa strujanje je lokalno subsonično ($M < 1$). Ovo subsonično strujanje potom eksplandira do niskih supersoničnih vrijednosti preko tijela. Na izlaznoj ivici tijela nastaju slabi udarni talasi, najčešće u obliku "ribljeg repa". Strujna polja karakterišu miješana subsonično-supersonična područja, pa treba uzeti u obzir fizikalno ponašanje obje vrste strujanja. Općenito se može uzeti da se za tanka, vitka tijela transonično strujanje događa pri Mach-ovim brojevima slobodne struje u rasponu $0,8 < M_{\infty} < 1,2$.

Strujno polje je supersonično ukoliko je Mach-ov broj u svakoj tački veći od jedan. Supersonična strujanja često su okarakterisana pojavom udarnih talasa kroz koje se svojstva strujanja i strujnica mijanjaju skokovito, diskontinuirano (nasuprot glatkim, kontinuiranim promjenama u subsoničnom strujanju). Kako je lokalna brzina u supersoničnom strujanju veća od brzine zvuka,

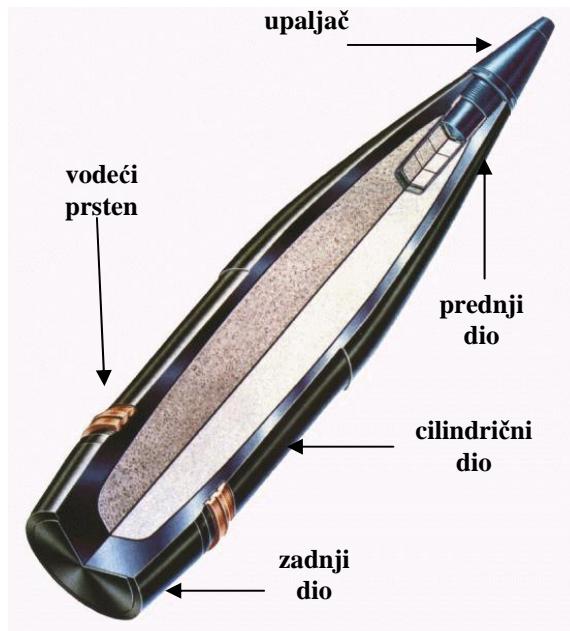
poremećaji nastali u nekoj tački struje ne mogu se širiti uzstrujno (kao u podzvučnom strujanju). Ova osobina je jedna od najvažnijih fizikalnih razlika između subsoničnog i supersoničnog strujanja.

Dalnjim povećavanjem Mach-ovog broja iznad jedan, udarni talasi se približavaju površini tijela. Također, povećava se jačina udarnog talasa, što dovodi do značajnog povećanja temperature u području između udarnog talasa i površine tijela (udarni sloj). Ako je M_∞ dovoljno velik, udarni sloj postaje vrlo tanak pa dolazi do međudjelovanja između udarnog talasa i viskoznog graničnog sloja na površini tijela. Temperatura u udarnom sloju postaje dovoljno visoka da omogućava razvoj hemijskih reakcija u vazduhu. Molekule kisika O_2 i azota N_2 se cijepaju, tj. dolazi do disocijacije molekula gasa. Kad Mach-ov broj M_∞ dovoljno naraste tako da viskozne interakcije i hemijske reakcije postaju dominantna pojava u strujanju, takvo strujno polje naziva se hipersoničnim. Obično se uzima da je to za vrijednosti $M_\infty > 5$, što je samo orijentacijskog karaktera.

Kritično aerodinamičko ponašanje odvija se u opsegu $0.8 < M < 1.2$, zavisno od projektila, pri čemu dolazi do promjene vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata i za više od 100 % u odnosu na vrijednosti u subsoničnom području.

Osnosimetrični projektil je projektil čija je vanjska površina osnosimetričnog oblika, odnosno svaka ravan kroz osu simetrije je istovremeno ravan simetrije vanjske površine. Artiljerijski projektili su osnosimetrični i, u pravilu, se sastoje od:

- Prednjeg dijela
- Cilindričnog dijela
- Zadnjeg dijela
- Vodećeg prstena



Slika 1.3: Osnosimetrični brzorotirajući artiljerijski projektil 155 mm M107

Prednji dio je, obično, složenog oblika i sastoji se od upaljača, adaptera (ne mora biti prisutan) i prednjeg oživalja. Upaljač je zaobljen ili zatupljen na vrhu i može biti konusnog ili oživaljnog oblika. Vodeći prsten je smješten pri kraju cilindričnog dijela i namjena mu je da urezivanjem u zavoje žlebove cijevi, tokom kretanja projektila kroz cijev oruđa, obezbjedi dovoljnu početnu

ugaonu brzinu neophodnu za stabilan let projektila. Zadnji dio može biti oblika konusa ili oživila, sa ravnim ili upuštenim dnom.

Artiljerijski projektili, najvećim dijelom, lete u području transonike i niske supersonike. Pri izlasku iz cijevi ovi projektili imaju maksimalnu brzinu, između 1.5 i 2 Mach-a. Tokom leta, brzina opada do tjemena putanja gdje ima minimalna vrijednost, područje transonike, a zatim ponovo raste.

Sva nastojanja u usavršavanju projektila usmjerena su ka povećanju dometa, povećanju efikasnosti na cilju i smanjenju cijene. Domet projektila je direktno uslovjen silom otpora koja nastaje pri kretanju projektila kroz vazduh. Da bi se, uopšte, mogla razmatrati efikasnost projektila na cilju, potrebno je što više približiti teoretski određenu putanju stvarnoj putanji projektila, odnosno projektil dovesti u blizinu cilja. Jedan od najjednostavnijih modela za proračun putanja je model sa tri stepena slobode (3DOF), koji posmatra kretanje projektila kao kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile otpora i težine, a na kojem se zasniva i izrada preliminarnih tablica gađanja. Uvođenjem sile uzgona, odnosno napadnog ugla, i ugaone brzine u proračun, model se usložnjava. Sistem se zasniva na jednačini kretanja težišta projektila i jednačini promjene ugaone brzine. Ovim jednačinama se dodaju jednačine: relativne brzine, vektora položaja i promjene nutacionog ugla dinamičke ravnoteže. Ovaj model je poznat pod nazivom „model modifikovane materijalne tačke“, odnosno 4DOF model. Model za proračun putanje koji uzima u obzir i Magnusov moment je 6DOF model. On omogućava i proračun stabilnosti projektila tokom leta, što je veoma bitno za procjenu rasturanja.

U svim modelima koji se koriste za proračun putanja projektila u atmosferi neophodno je poznavati koeficijent sile otpora. Određivanje aerodinamičkog koeficijenta otpora vrši se jednom od sljedećih metoda: teoretska, numerička, eksperimentalna ili kombinovana.

U teoretskim metodama prave se pretpostavke pojednostavljenja da bi problem bio rješiv. Ovo uključuje pojednostavljenje geometrije i pojednostavljenje jednačina koje opisuju tok oko projektila.

Napredni CFD (Computational Fluid Dynamics) kodovi numerički rješavaju Navier-Stokes-ove (Navier-Stokes) jednačine i mogu pokazati kompletno polje toka oko objekta za specifične uslove leta. Najveći problem kod ove metode su granični uslovi jer početni uslovi moraju biti definisani sa velikom tačnošću.

Eksperimentalne metode obuhvataju ispitivanja u aero tunelu i na poligonu. Određivanje aerodinamičkih koeficijenata na ovaj način je skupo, u aero tunelu dolazi do problema skaliranja ako model nije u prirodnoj veličini, u području transonike javlja se refleksija udarnog talasa od zid tunela, aerodinamički koeficijenti se određuju za samo jedan Mach-ov broj, itd., dok na poligonu je potrebno posjedovati opremu za mjerjenje karakteristika leta, model mora biti stabilan tokom leta, a svođenje podataka je komplikovano.

Kombinovane metode uključuju kompilacije empirijskih podataka i podataka iz tunela kombinovanih sa kompjuterskim modelima teorijskih jednačina. Jedan od nedostataka ovih metoda je da one često zahtjevaju pojednostavljenje geometrije.

Cilj rada je da se, na osnovu novijih teoretskih i eksperimentalnih istraživanja ponašanja projektila u atmosferi, postavi model koji omogućava tačnije predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora pri opstrujavanju pod nultim napadnim uglom za brzorotirajući projektil osnosimetrične konfiguracije. Zbog nemogućnosti vršenja eksperimenata, referentne vrijednosti za procjenu tačnosti određenih veličina preuzeće se iz dostupnih baza podataka.

2. Dosadašnja istraživanja

Projektil se kreće kroz vazduh pod dejstvom sile gravitacije i sile koju stvara tok vazduha oko projektila. Dejstvo vazduha na projektil se može zamjeniti djelovanjem jedne aerodinamičke sile i jednog momenta za centar mase. Nakon što projektil napusti cijev oruđa njegova trajektorija je potpuno određena pomoću ovih sila. Prvo zadovoljavajuće rješenje za definisanje putanje projektila dao je Euler, polazeći od pretpostavke da je projektil materijalna tačka koja se kreće pod dejstvom sile zemljine teže i sile otpora vazduha.

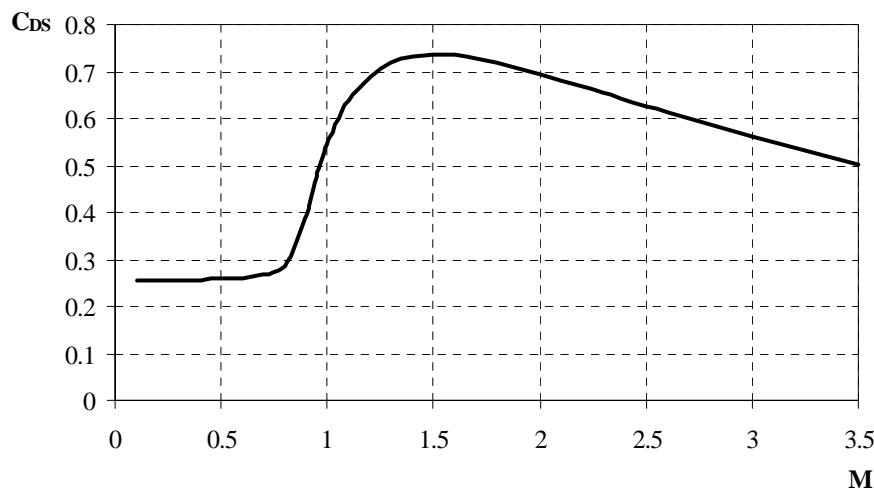
U praksi se, radi izbjegavanja teškoće oko dimenzija, primjenjuju bezdimenzionalne veličine nazvane aerodinamički koeficijenti, koji se dobivaju dijeljenjem komponenata sile i momenta s referentnom silom ili referentnim momentom.

Prvobitni pokušaji određivanja aerodinamičkih koeficijenata svodili su se na iznalaženje pogodne analitičke forme kojom bi se opisalo djelovanje vazduha na projektil. Na osnovu eksperimentalnih mjerjenja su definisane tzv. etalon funkcije koeficijenta otpora pomoću kojih se, množenjem sa koeficijentom oblika, može odrediti koeficijent otpora datog projektila. Ako su projektili sa kojima je određena etalon funkcija slični (po obliku i veličini) onima za koje se određuje koeficijent otpora, onda je koeficijent oblika konstanta.

Siacci je krajem XIX vijeka vršio analizu gađanja, koja su vršena u Rusiji, Engleskoj, Holandiji i Njemačkoj, sa topovskim granatama koje nisu imale zadnji konus a prednji dio je imao malu vitkost. Konstatovao je da za sve takve projektile može da se uzme da je koeficijent otpora, $C_D(M)$, bilo kojeg projektila proporcionalan nekoj srednjoj krivoj koju nazivamo "Siacci-jev etalon" a obilježavamo sa $C_{DS}(M)$. Numeričkom analizom Siacci je odredio analitički oblik ovog etalona [38]:

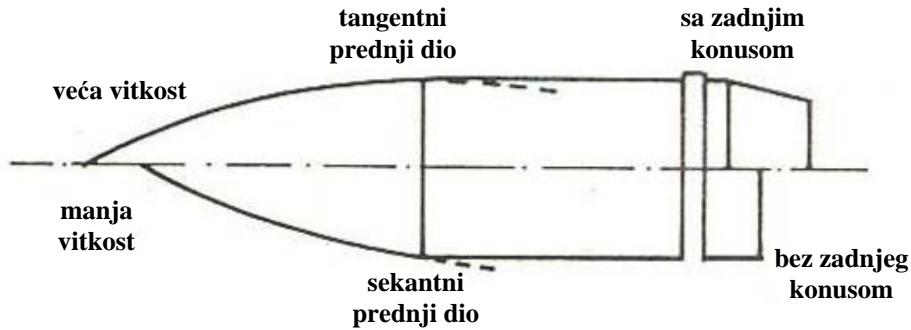
$$C_{DS} = \frac{0.018193}{M^2} \left[68.23M - 48.5 + \sqrt{(56.16M - 47.95)^2 + 9.6} + \frac{15.06M(340.8M - 300)}{371 + (1.704M)^{10}} \right] \quad (2.1)$$

Siacci-ev zakon otpora ne odgovara savremenim oblicima projektila, ali se zadržao u praksi i koristi se za projektile streljačkog oružja.



Slika 2.1: Siacci-jev etalon

Nakon prvog svjetskog rata u Francuskoj su vršena vrlo detaljna ispitivanja sa raznim vrstama projektila (sa i bez zadnjeg konusa, sa manjom i većom vitkošću prednjeg dijela, sa tangentnim i sekantnim prednjim dijelom, itd.), s ciljem da se odredi etalon koeficijenta koji bi odgovarao svim do tada poznatim projektilima.



Slika 2.2: Oblik projektila za koji su određene etalon funkcije

Usvojena je familija krivih, nazvana po autorima „Garnier-Dupuis“ funkcije otpora, koje su pored Mach-ovog broja zavisile i od jednog koeficijenta, nazvanog parameter familije j , a koji može uzimati vrijednosti od 0.04 do 0.24. Koeficijent otpora svakog projektila se, uz pomoć ove funkcije, mogao napisati u obliku [38]:

$$C_D = i_f C_{Df}(M, j) \quad (2.2)$$

Funkcija C_{Df} je definisana s dvije funkcije C_{D1} i C_{D2} koje su različitog oblika u raznim intervalima Mach-ovih brojeva.

$$C_{Df} = C_{D1} - j \cdot C_{D2} \quad (2.3)$$

Tako je za $M > 1$:

$$\begin{aligned} C_{D1} &= \frac{2.105}{M^2} \left[M - 0.5 + \frac{0.166(M - 2.05)}{10^{5.8(1-M)}} \right] \\ C_{D2} &= \frac{2.105}{M^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Za $0.8414 < M < 1$:

$$\begin{aligned} C_{D1} &= \frac{2.105}{M^2} \left[0.14 + \frac{0.36}{10^{5.8(1-M)}} \right] \\ C_{D2} &= \frac{2.105}{M^2} \left[0.35 + \frac{0.65}{10^{5.8(1-M)}} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Do kritičnog Mahovog broja koji se određuje po formuli:

$$M_a = \frac{0.8414}{10^{0.0372-0.03j}} \quad (2.6)$$

funkcije C_{D1} i C_{D2} su konstante i iznose:

$$C_{D1} = 0.538$$

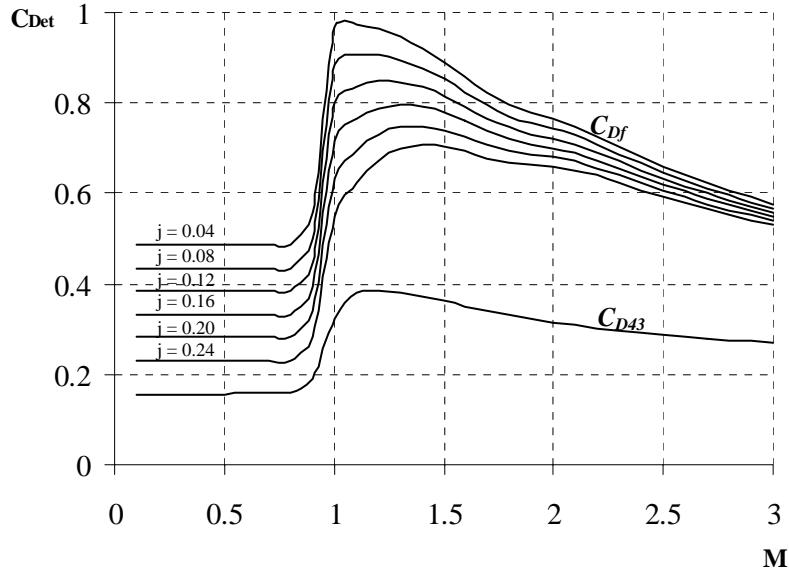
$$C_{D2} = 1.283$$

U području $M_a < M < 0.8414$ funkcije se mijenjaju po zakonu:

$$\begin{aligned} C_{D1} &= 0.538 \cdot 10^f \\ C_{D2} &= 1.283 \cdot 10^f \end{aligned} \quad (2.7)$$

pri čemu je f veličina koja zavisi od M i j .

U toku drugog svjetskog rata, u SSSR-u, vršena su obimna ispitivanja artiljerijskih projektila, koja su uzela u obzir i precesiono kretanje projektila oko težišta na zakrivljenoj putanji, što je rezultiralo etalon funkcijom $C_{D43}(M)$ [38].



Slika 2.3: Francuski etaloni $C_{Df}(M, j)$ za razne vrijednosti parametra "j" i ruski etalon $C_{D43}(M)$ [12]

Isto tako, 1958 god., vršena su ispitivanja vitkih projektila sa krilcima i određena je etalon funkcija nazvana $C_{D58}(M)$ [38]. Prema teoretskim proračunima ova funkcija je pogodna za supersonične projektile s nadkalibarnim krilcima i pomoću nje se koeficijent otpora izražava jednačinom:

$$C_D = i_{58} C_{D58}(M) \quad (2.8)$$

U drugom svjetskom ratu raste potreba za bržim i tačnijim metodama za predviđanje aerodinamičkih osobina radi ostvarenja što veće efikasnosti projektila na cilju, tj. za upotrebu što manjeg broja projektila za izvršenje zadatka. To se ostvaruje kompilacijom dostupnih podataka, proračunima baziranim na teoretskim rješenjima toka kao i kombinacijom teorije i eksperimenata. Razvojem računarske tehnike generira se veliki interes implementacije bržih, uniformnijih i tačnijih aerodinamičkih proračuna. Pristup baziran na proračunu polja toka nudi dobre izglede za poboljšanje tačnosti i uniformnosti aproksimacija za proizvoljne oblike projektila. Međutim, i s naprednim računarima, ovaj pristup proračunu aerodinamičkih osobina je obično prilično opširan, primjenjiv samo za specifičan brzinski region, Reynolds-ov broj i napadni ugao, a težak za primjenu na stvarni borbeni projektil.

Pošto sila otpora nastaje iz dva prirodna izvora – normalnog i tangencijalnog napona, najjednostavnije je aerodinamički koeficijent aksijalne sile razdvojiti na dva dijela, dio koji je posljedica pritiska i dio koji je posljedica trenja. Aerodinamički koeficijent aksijalne sile jednak je aerodinamičkom koeficijentu otpora pri nultom napadnom uglu. Uopšteno, aerodinamički koeficijent otpora ima tri osnovne komponente [12]:

$$C_A = C_{Ap} + C_{Af} + C_{Ab} \quad (2.9)$$

- Prvi član je posljedica razlike normalnog pritiska na vanjskoj površini i naziva se talasni otpor. Zavisi od oblika površine, a za određeni oblik površine funkcija je Mach-ovog broja.

- Drugi član je posljedica trenja vazduha po vanjskoj površini te na njega utiče pravilnost površine i njena hrapavost, a naziva se koeficijent trenja. On ovisi o Reynolds-ovom broju.
- Treći član je kočenje zbog potpritiska iza projektila, koji nazivamo bazni otpor ili koeficijent otpora dna, i uglavnom ovisi o Mach-ovom broju. Ovaj koeficijent se može smanjiti isticanjem nekog gasa na dnu projektila, pri čemu taj maseni protok ne smije biti veći od jednog vrlo malog dijela referentnog protoka kako ne bi razbio opstrujavanje zadnjeg dijela projektila. Ugradnjom gaso-generatora u zadnji dio projektila smanjuje se otpor dna da jedne trećine njegove vrijednosti, a samim tim smanjuje se i koeficijent otpora projektila. Takvi projektili nazivaju se projektili sa base bleed-om.

Talasni otpor se analizira teorijom potencijala u onim slučajevima u kojima se granični sloj ne odvaja i ne prouzrokuje velike promjene u raspodjeli pritiska (čak i sa odvajanjem graničnog sloja, potencijal toka igra značajnu ulogu u određivanju raspodjele pritiska). Teorija tankog tijela kao i linearna teorija se može primjeniti za kompletну konfiguraciju. Teorije veće tačnosti od linearne teorije su raspoložive u obliku Van Dyke-ove teorije drugog reda (hibridna teorija) i metoda karakteristika.

Viskozni otpor ili otpor trenja je teško predvidjeti ili izmjeriti, zbog nemogućnosti da se tačno odredi gdje granični sloj prelazi iz laminarnog u turbulentni tokom leta (tačka prelaza). Položaj tačke prelaza zavisi od Reynolds-ovog broja, Mach-ovog broja, raspodjele pritiska, nivoa turbulencije, brzine prenosa topline, hrapavosti površine i drugih faktora koji nisu u potpunosti razjašnjeni.

Bazni otpor se određuje razmatranjima potencijalnog toka i viskoznosti. Tako zvani "mrtvi region" (zona iza dna projektila) ima statički pritisak koji zavisi od načina na koji je zatvoren vanjski tok iza projektila i načina na koji se granični sloj od baze miješa sa mrtvim regionom i vanjskim tokom. Iako postoji mnogo teorijskih radova iz ove oblasti, inženjerski proračuni se i dalje zasnivaju na korelacijama sistemskih eksperimentalnih podataka. Bazni pritisak je takođe zavisan i od oblika zadnjeg dijela.

Aerodinamički koeficijent otpora zavisi, općenito, od Mach-ovog broja, rezultirajućeg napadnog ugla i Reynolds-ovog broja. U subsoničnom regionu, koeficijent otpora se malo mijenja. Sa povećanjem uticaja stišljivosti počinje da raste, pri čemu se naglo povećanje događa u transoničnom području. Maksimalnu vrijednost koeficijent otpora ostvaruje za Mach-ov broj između 1 i 1.5, zavisno od oblika projektila. Pri supersoničnom opstrujavanju vrijednost koeficijenta otpora opada sa porastom Mach-ovog broja, da bi u zoni hipersoničnih brzina počeo da se približava konstanti.

Otpor pritiska je vezan sa količinom energije neophodnom za neprekidno formiranje talasa kako se projektil kreće kroz vazduh. Pri dovoljno niskim brzinama (nestišljivi fluid), otpor pritiska se poviňuje d'Alembert-ovom paradoksu, ako je fluid neviskozan otpor je nula. Međutim, trag iza dna projektila je područje odvojenog (separacije) toka, stoga otpor dna postoji i pri brzinama kada je fluid nestišljiv.

Kako brzina projektila raste, efekti stišljivosti se pojavljuju. Potrebno je više energije da bi se održao sistem talasa i otpor raste. Brzina slobodnog toka raste proizvodeći lokalni zvučni tok u nekoj tački na projektilu i ova brzina označava početak transoničnog opstrujavanja. Povećanje brzine prati formiranje udarnih talasa koji zahtjevaju značajno više energije za održanje, a efekat na otpor je nagli porast nakon pojave prvih udarnih talasa. Brzina slobodnog toka je dostigla vrijednost iznad koje je lokalna brzina toka duž površine svugdje supersonična i ova brzina označava početak supersoničnog režima.

Prema tome koeficijent otpora pritiska je, isključujući dno, nula pri niskim subsoničnim brzinama, raste naglo pri transoničnim brzinama, a zatim lagano opada sa povećanjem brzine (supersonični region). Trag iza projektila je područje reduciranih pritiska, odnosno parcijalni

vakuum. Pri veoma niskim subsoničnim brzinama, bazni pritisak je samo neznatno niži od statičkog pritiska slobodnog toka, a pri značajno visokim supersoničnim brzinama bazni pritisak se približava nuli. Prema tome koeficijent baznog otpora je važan u svim režimima toka.

Otpor trenja projektila zavisi, primarno, od Reynolds-ovog broja, a u manjoj mjeri od stišljivosti. Projektil sa potpuno turbulentnim graničnim slojem ima značajno veći otpor trenja od projektila sa laminarnim graničnim slojem. S druge strane, s povećanjem brzine slobodnog toka smanjuje se koeficijent otpora trenja.

Teoretski pristup određivanja aerodinamičkih koeficijenata temelji se na mehanici fluida, odnosno numeričkom rješavanju sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina sa zadanim graničnim uslovima na projektilu i u beskonačnosti (slobodan tok). Zavisno od brzine opstrujavanja, koriste se različite metode za rješavanje parcijalne diferencijalne jednačine potencijala brzine da bi se odredile komponente lokalne brzine u svakoj tački na površini tijela pomoću kojih se računa koeficijent pritiska na bilo kojem mjestu na tijelu.

Kada je poznat raspored pritiska, aerodinamički koeficijenti aksijalne i normalne sile i momenta propinjanja nastalih uslijed pritiska, za osnosimetrično tijelo ograničeno omotačem P koji je nastao rotacijom krive $r = r(x)$, se mogu odrediti prema definiciji [11]:

$$\begin{aligned} \text{koeficijent aksijalne sile: } & C_A = \frac{1}{S} \iint_P C_p r \frac{dr}{dx} d\theta dx \\ \text{koeficijent normalne sile: } & C_N = -\frac{1}{S} \iint_P C_p r \cos \theta d\theta dx \\ \text{koeficijent momenta propinjanja: } & C_M = \frac{1}{\pi R_{ref}^3} \iint_P C_p x \cdot r \cos \theta d\theta dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

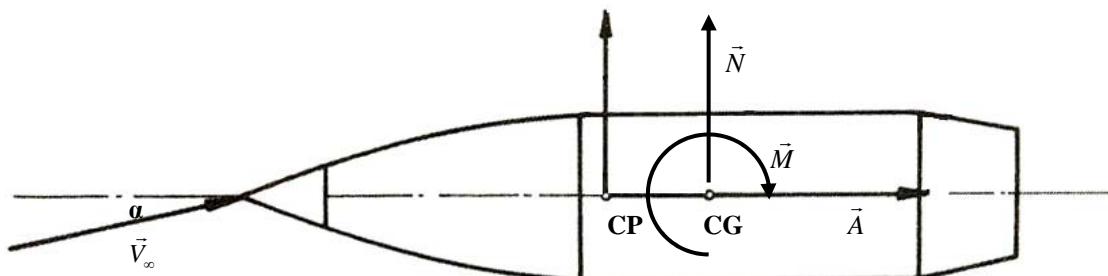
gdje su:

x, r, θ - cilindrične koordinate

S - referentna površina jednaka površini kruga prečnika kalibra

R_{ref} - referentni poluprečnik

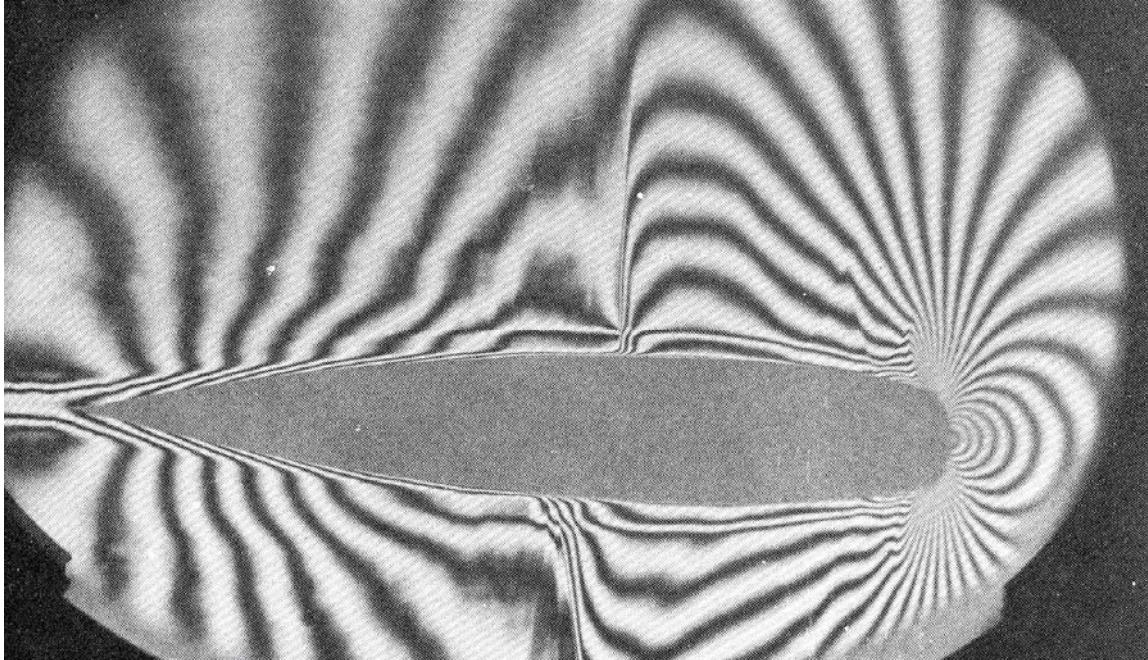
C_p - koeficijent pritiska



Slika 2.4: Aksijalna sila, normalna sila i moment propinjanja

2.1 Koeficijent otpora uslijed pritiska

U subsonično-transoničnom području toka, pritisci na površini tijela (isključujući dno) nastaju uslijed odvajanja graničnog sloja na spoju prednjeg i cilindričnog dijela, na kraju tijela i na nagibu zadnjeg dijela.



Slika 2.5: Opstrujavanje projektila pri $M = 0.8$ [43]

2.1.1 Subsonično opstrujavanje

Strujno polje definiše se kao subsonično ukoliko je Mach-ov broj u svakoj tački manji od jedinice ($M < 1$). Subsonična strujanja imaju glatke strujnice, bez skokovitih promjena u nagibu. Budući da je brzina strujanja u svakoj tački manja od brzine zvuka, poremećaji u struji šire se u svim smjerovima i utječu na cijelo strujno polje. Općenito se uzima da $M_\infty < 0.8$ osigurava subsonično strujanje preko tankih, zaobljenih tijela. Za debela, tupa tijela M_∞ mora biti još manji da bi se osiguralo potpuno subsonično strujanje.

2.1.1.1 Parcijalna diferencijalna jednačina potencijala poremećene brzine

Koeficijent pritiska, potreban za određivanje aerodinamičkih koeficijenata sila i momenata, u nekoj tački na tijelu se određuje preko komponenata lokalne brzine u toj tački. Unošenjem tijela u struju vazduha dolazi do poremećaja strujanja, pa se lokalna brzina u nekoj tački može izraziti superpozicijom brzine slobodnog toka i poremećene brzine.

Na raspolaganju su nam jednačina kontinuiteta, Euler-ova jednačina (tj. jednačina količine kretanja), te energetska jednačina (u ovom slučaju za idealan gas i adijabatsko strujanje) [44].

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= -\operatorname{grad} p \\ p\rho^{-\gamma} &= \text{const.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Iz ovih jednačina dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu potencijala poremećene brzine.

Iz druge jednačine sistema (2.11), projektovanjem na koordinatne ose i razvijanjem, u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w \\ \operatorname{div} &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.12)$$

dobijemo

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} w \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} w \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} w \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.13)$$

zato što je prema trećoj jednačini sistema (2.11) $p(\rho)$. Iz ovih jednačina je:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} w \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} &= -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} w \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} &= -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} w \right)\end{aligned}\quad (2.14)$$

Iz prve jednačine sistema (2.11) dobije se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \theta} + \frac{\rho v}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} w + \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

Zamjenom u ovu jednačinu parcijalnih derivacija dobijenih iz druge jednačine sistema (2.11)

$$\begin{aligned}-\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} w \right) \cdot u + \\ -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} w \right) \cdot v + \\ -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} w \right) \cdot w + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.16)$$

Dijeljenjem s gustinom ρ i sređivanjem, jednačina se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} - \\ - \frac{uv}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{vw}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{wu}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left(a^2 - u^2\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(a^2 - v^2\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \left(a^2 - w^2\right) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a^2 \frac{v}{r} - \\ - uv \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - vw \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) - wu \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Iz gornje jednačine, kvadrat brzine zvuka a^2 , može se eliminisati koristeći Bernulijevu (Bernulli) jednačinu

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \\ a^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (V_\infty^2 - u^2 - v^2 - w^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

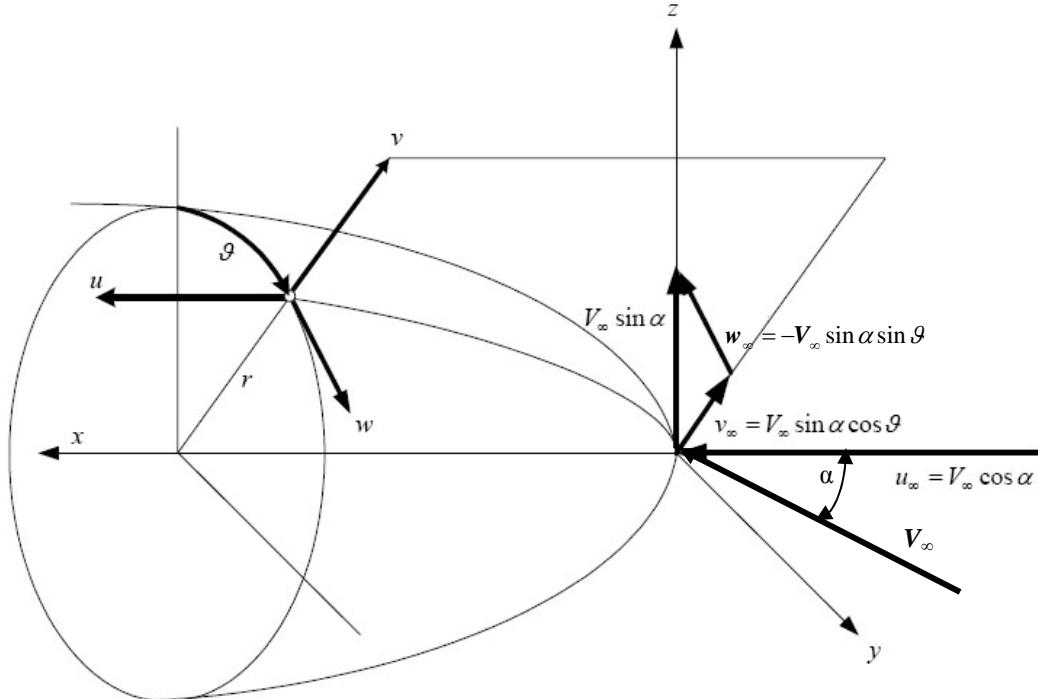
2.1.1.2 Linearizacija jednačine potencijala poremećaja

Uvedimo poremećaje brzina [44]:

$$u = u_\infty + \hat{u} \quad v = v_\infty + \hat{v} \quad w = w_\infty + \hat{w} \quad a = a_\infty + \hat{a} \quad (2.20)$$

i definilišmo potencijal poremećaja brzina [44]:

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \hat{\phi}_x \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \hat{\phi}_r \quad \hat{w} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = \frac{\hat{\phi}_\theta}{r} \quad (2.21)$$



Slika 2.6: Komponente neporemećene brzine

Razložimo neporemećenu brzinu V_∞ na uzdužnu u_∞ , radijalnu v_∞ i cirkularnu w_∞ komponentu,

$$\begin{aligned} u_\infty &= V_\infty \cos \alpha \\ v_\infty &= V_\infty \sin \alpha \cdot \cos \vartheta \\ w_\infty &= -V_\infty \sin \alpha \cdot \sin \vartheta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Poslije unošenja tijela u struju vazduha (poremećeno strujanje)

$$\begin{aligned} u &= u_\infty + \hat{u} = V_\infty \cos \alpha + \hat{\phi}_x \\ v &= v_\infty + \hat{v} = V_\infty \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \hat{\phi}_r \\ w &= w_\infty + \hat{w} = -V_\infty \sin \alpha \cdot \sin \vartheta + \frac{\hat{\phi}_\vartheta}{r} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Iz ovih jednačina, s obzirom da su V_∞ i α konstante, derivacijom dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \hat{\phi}_{xx} & \frac{\partial u}{\partial r} &= \hat{\phi}_{xr} & \frac{\partial u}{\partial \vartheta} &= \hat{\phi}_{x\vartheta} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \hat{\phi}_{xr} & \frac{\partial v}{\partial r} &= \hat{\phi}_{rr} & \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= -V_\infty \sin \alpha \cdot \sin \vartheta + \hat{\phi}_{r\vartheta} = w_\infty + \hat{\phi}_{r\vartheta} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\hat{\phi}_{x\vartheta}}{r} & \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\hat{\phi}_{r\vartheta}}{r} - \frac{\hat{\phi}_\vartheta}{r^2} = \frac{\hat{\phi}_{r\vartheta}}{r} - \frac{\hat{w}}{r} & \frac{\partial w}{\partial \vartheta} &= -V_\infty \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{\hat{\phi}_{\vartheta\vartheta}}{r} = -v_\infty + \frac{\hat{\phi}_{\vartheta\vartheta}}{r} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Smjenom ovih vrijednosti u parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\begin{aligned} (a^2 - u^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - v^2) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + (a^2 - w^2) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + a^2 \frac{v}{r} - \\ - uv \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - vw \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - wu \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

i u jednačinu

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (V_\infty^2 - u^2 - v^2 - w^2) \quad (2.26)$$

te ako pretpostavimo da su poremećaji brzina u odnosu na neporemećenu brzinu mali brojevi, a što je slučaj kad je dr/dx mali broj i kada je mali napadni ugao α , zanemarujući veličine drugog reda i eliminacijom a^2 , dobivamo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu potencijala poremećaja u obliku:

$$(1 - Ma^2) \hat{\phi}_{xx} + \hat{\phi}_{rr} + \frac{\hat{\phi}_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{\hat{\phi}_r}{r} = 0 \quad (2.27)$$

2.1.1.3 Princip rješavanja

Rješenje ove parcijalne diferencijalne jednačine tražimo u obliku zbiru [44]:

$$\hat{\phi} = \phi_0(x, r) + \phi_1(x, r, \vartheta) \quad (2.28)$$

pri čemu prvi član predstavlja potencijal poremećaja osnosimetričnog opstrujavanja. On mora zadovoljiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu potencijala poremećaja koja za osnosimetrično opstrujavanje ima oblik:

$$(1 - Ma^2) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial r} = 0 \quad (2.29)$$

(za osnosimetrično opstrujavanje potencijal ne zavisi od ugla ϑ , tj. $\hat{\phi}_{\vartheta\vartheta} = 0$). Tražimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu koju treba zadovoljiti dopunski potencijal poremećaja brzina $\phi_1(x, r, \vartheta)$. U opštu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, (2.27), koja mora biti zadovoljena pri opstrujavanju pod napadnim uglom

$$(1 - Ma^2) \hat{\phi}_{xx} + \hat{\phi}_{rr} + \frac{\hat{\phi}_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{\hat{\phi}_r}{r} = 0$$

zamjenimo potencijal pomoću zbiru $\phi = \phi_0 + \phi_1$.

$$\begin{aligned} & \left(1 - Ma^2\right) \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \vartheta^2}}_0 + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial r} + \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial r} \right) = 0 \\ & \underbrace{\left(1 - Ma^2\right) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial r}}_0 + \left(1 - Ma^2\right) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dopunska funkcija mora zadovoljiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$(1 - Ma^2) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial r} = 0 \quad (2.31)$$

S obzirom na specifičan oblik ove parcijalne diferencijalne jednačine potencijala, njeno je rješenje:

$$\hat{\phi}_1(x, r, \vartheta) = -\frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial r} \cos \vartheta \quad (2.32)$$

2.1.1.4 Granični uslovi za potencijal poremećaja

Granični uslovi su na tijelu (slika 2.7) [44]:

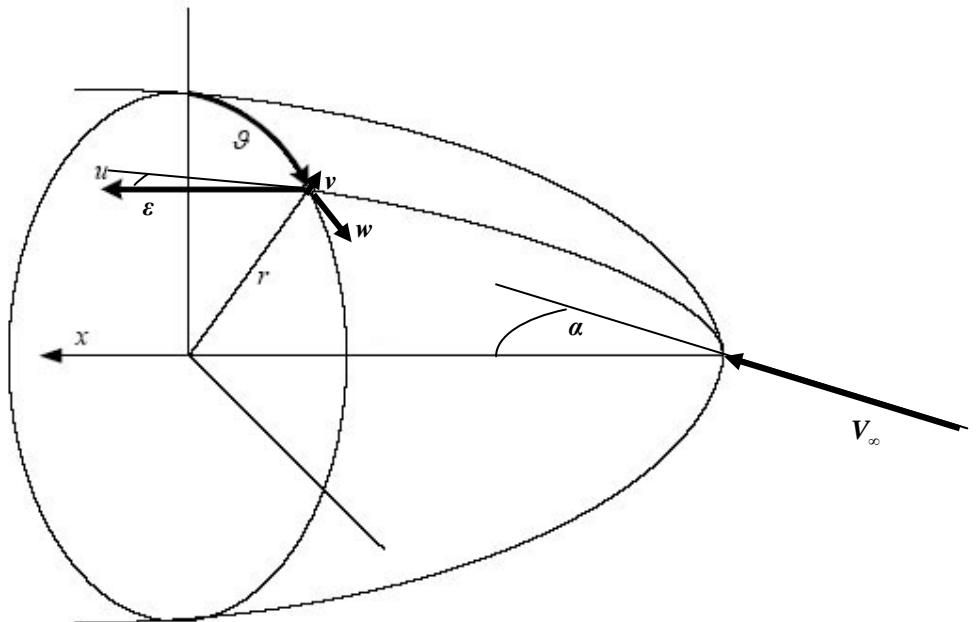
$$\begin{aligned} v &= u \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \\ v_\infty + \hat{v} &= (u_\infty + \hat{u}) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.33)$$

gdje je

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{dr}{dx} \quad (2.34)$$

ili pomoću potencijala poremećaja brzina

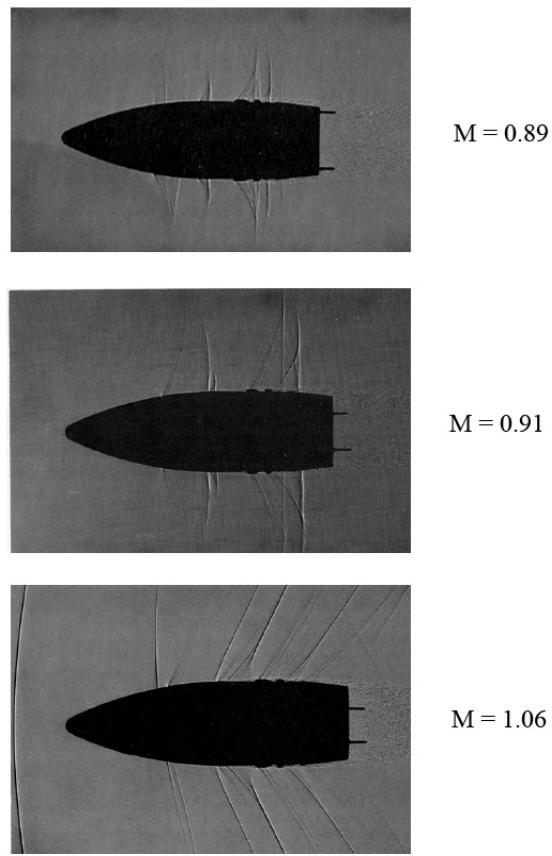
$$\begin{aligned} v_\infty + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= \left(u_\infty + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \\ V_\infty \sin \alpha \cos \vartheta + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= \left(V_\infty \cos \alpha + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.35)$$



Slika 2.7: Granični uslovi na tijelu

2.1.2 Transonično opstrujavanje

Transonični tok karakteriše simultano prisustvo i subsoničnog i supersoničnog regiona unutar polja toka. Osobine transoničnog toka mogu se izvesti iz opštih jednačina gasne dinamike – jednačine stanja, kontinuiteta, količine kretanja i energije.



Slika 2.8: Transonično opstrujavanje [43]

2.1.2.1 Teorija malih poremećaja

Jednačina stanja za stacionaran, izentropski, neviskozni tok u indeksnoj notaciji ima oblik [40]:

$$u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.36)$$

Teorija malih poremećaja daje polje brzine kao:

$$u_1 = U + u; \quad u_2 = v; \quad u_3 = w \quad (2.37)$$

gdje U označava brzinu slobodnog toka u pravcu x-ose, a u , v i w se nazivaju komponente poremećaja brzine u pravcima x , y i z .

Uvrštavajući polje brzine u jednačinu (2.36) dobije se:

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= (U + u)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \\ &+ (U + u) \cdot v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \cdot w \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w \cdot (U + u) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Iz jednačine energije za idealan gas brzina zvuka a izražena preko poremećaja brzina je:

$$\frac{(U + u)^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \quad (2.39)$$

ili

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot (2uU + u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.40)$$

Uvrštavajući dobiveni izraz za brzinu zvuka u jednačinu (2.38) i dijeleći sa kvadratom brzine zvuka u slobodnom toku, uz grupisanje izraze, dobije se jednačina (2.41):

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u}{U} + \frac{(\gamma + 1)}{2} \frac{u^2}{U^2} + \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{(v^2 + w^2)}{U^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u}{U} + \frac{(\gamma + 1)}{2} \frac{v^2}{U^2} + \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{(w^2 + u^2)}{U^2} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u}{U} + \frac{(\gamma + 1)}{2} \frac{w^2}{U^2} + \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{(u^2 + v^2)}{U^2} \right] \frac{\partial w}{\partial z} + \\ &+ M_\infty^2 \left[\frac{v}{U} \left(1 + \frac{u}{U} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{w}{U} \left(1 + \frac{u}{U} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{vw}{U^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Kako su poremećaji brzine mali (u/U , v/U i w/U su mnogo manji od jedan), prethodna jednačina se može pojednostaviti, zanemarivanjem izraza na desnoj strani koji sadrže kvadrate poremećaja brzina, tj.

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{u}{U} \frac{\partial u}{\partial x} + M_\infty^2 (\gamma - 1) \frac{u}{U} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ M_\infty^2 \frac{v}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + M_\infty^2 \frac{w}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Takođe, mogu se zanemariti svi izrazi na desnoj strani koji su značajno manji u odnosu na izraze na lijevoj strani jednačine.

Na taj način se dobije linearna jednačina koja sadrži samo poremećaj brzina i važi samo za subsonični i supersonični tok.

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.43)$$

Za transonični tok, gdje $M_\infty \rightarrow 1$, koeficijent $\partial u / \partial x$ na lijevoj strani postaje veoma mali, a član $M_\infty^2(\gamma + 1) \frac{u}{U} \frac{\partial u}{\partial x}$ se ne može zanemariti.

Prema tome, jednačina transoničnog toka izražena preko poremećaja brzina je:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} = M_\infty^2(\gamma + 1) \frac{u}{U} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.44)$$

Za nevertložno strujanje, poremećaj potencijala brzine ϕ egzistira, tako da je:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.45)$$

pa prethodna jednačina za transonični tok izražena preko potencijala brzine ima oblik:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{M_\infty^2(\gamma + 1)}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

Za rotaciono tijelo pogodna je upotreba cilindričnih koordinata (x, r, ϑ) pri čemu osa x leži na osi tijela. Komponente brzine, u skladu sa (x, r, ϑ) , su u_x , u_r i u_ϑ .

Potencijal brzine u cilindričnim koordinatama je:

$$u_x = U + u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \quad (2.47)$$

pa transformacijom kartezijskih koordinata u cilindrične, jednačina koja opisuje transonični tok je:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = \frac{M_\infty^2(\gamma + 1)}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.48)$$

Za osnosimetrični tok, gdje su uslovi isti u svakoj merdijanskoj ravni, nema promjena sa ϑ , tako da se nelinearna jednačina potencijala malih poremećaja brzine za osnosimetrični transonični tok može napisati kao:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{M_\infty^2(\gamma + 1)}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.49)$$

Biblarz, O. [13], uvodi modifikovanu jednačinu potencijala za osnosimetrične tokove u obliku:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_r) + (1 - M_\infty^2) \phi_{xx} = \phi_x \phi_{xx} \quad (2.50)$$

gdje su modifikovani potencijali brzine:

$$\phi_x = M_\infty^2(\gamma + 1) \frac{u_x}{U}, \quad \phi_r = M_\infty^2(\gamma + 1) \frac{u_r}{U} \quad (2.51)$$

2.1.2.2 Tačno rješenje za osnosimetrični transonični tok

Rješenje modifikovane jednačine potencijala za osnosimetrični tok dao je Biblarz [13] u obliku:

$$\phi(x, r) = \xi(x) \cdot \eta(r) + (1 - M_\infty^2)x \quad (2.52)$$

pri čemu je:

$$\xi = \xi(x) \text{ - funkcija samo od } x$$

$$\eta = \eta(r) \text{ - funkcija samo od } r$$

Zamjenom u modifikovanu jednačinu potencijala za osnosimetrični tok dobivamo dvije diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} \frac{d^2\xi}{dx^2} - \lambda \xi &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - \lambda \eta^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdje je λ konstanta separacije.

Rješenje prve diferencijalne jednačine se određuje množenjem obje strane sa $d\xi/dx$,

$$\frac{d\xi}{dx} \left(\frac{d\xi}{dx} \frac{d^2\xi}{dx^2} \right) - \frac{d\xi}{dx} (\lambda \xi) = 0 \quad (2.54)$$

odnosno

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^3 - \frac{\lambda}{2} \xi^2 \right) = 0 \quad (2.54')$$

Tako dobivamo:

$$\frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{3}{2} \lambda \xi^2 + \alpha \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.55)$$

pri čemu je α konstanta.

Razdvajanjem promjenjivih

$$dx = \frac{d\xi}{\left(\frac{3}{2} \lambda \xi^2 + \alpha \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.56)$$

nakon integracije se dobije:

$$x - x_0 = \int \frac{d\xi}{\left(\frac{3}{2} \lambda \xi^2 + \alpha \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.57)$$

α i x_0 su konstante integracije.

Rješenje druge nelinearne diferencijalne jednačine određuje se u obliku:

$$\eta(r) = \frac{4}{\lambda \cdot r^2} + (1 - M_\infty^2) f_1(r) + (1 - M_\infty^2)^2 f_2(r) + \dots \quad (2.58)$$

Uvrštavanjem prvog i drugog izvoda prethodnog izraza u jednačinu:

$$\frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - \lambda \eta^2 = 0 \quad (2.59)$$

nakon sređivanja, dobije se:

$$\eta(r) = \frac{1}{\lambda \cdot r^2} \left[4 + |1 - M_\infty^2| a \lambda r^{(\sqrt{8}+2)} + \frac{(1 - M_\infty^2)^2}{28 + 8\sqrt{8}} a^2 \lambda^2 r^{2(\sqrt{8}+2)} + \dots \right] \quad (2.60)$$

pri čemu je a konstanta.

2.1.2.3 Granični uslovi

U neviskoznom toku uslov koji se primjenjuje na čvrstu granicu površine je da pravac vektora brzine toka mora biti tangenta na čvrstu površinu. Izražen preko poremećaja brzina granični uslov je [41]:

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_{površina} = \frac{u_r}{U_\infty} \quad (2.61)$$

Modifikovani potencijal poremećaja brzine je:

$$\phi_r = M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{u_r}{U_\infty} \quad (2.62)$$

pa je prema tome

$$\frac{u_r}{U_\infty} = \frac{\phi_r}{M_\infty^2 (\gamma + 1)} \quad (2.63)$$

Sada granični uslov možemo napisati:

$$\left(\frac{dr}{dx} \right) = \frac{\phi_r}{M_\infty^2 (\gamma + 1)} \quad (2.64)$$

2.1.2.4 Koeficijent pritiska

Koeficijent pritiska je definisan izrazom [40]:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5 \cdot \rho_\infty U^2} = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (2.65)$$

Koristeći odnos pritisaka u funkciji Mach-ovog broja za izentropski proces koeficijent pritiska sada ima oblik:

$$C_p = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left[\left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_\infty^2}{2 + (\gamma - 1)M_\infty^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] \quad (2.66)$$

Uvodeći $M_\infty^2 = \frac{U^2}{a_\infty^2}$, $M^2 = \frac{u^2}{a^2}$ i koristeći jednačinu energije, koeficijent pritiska može se izraziti preko poremećaja brzina

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{(U+u)^2 + v^2 + w^2}{U^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} = \\ &= \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2u}{U} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{U^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Koristeći binomnu raspodjelu na izraz unutar uglaste zagrade, koeficijent pritiska sada ima oblik:

$$C_p = - \left(\frac{2u}{U} + \left(1 - M_\infty^2 \right) \frac{u^2}{U^2} + \frac{v^2 + w^2}{U^2} \right) \quad (2.68)$$

Koeficijent pritiska, za osnosimetrični tok, izražen u cilindričnim koordinatama, gdje su:

$$u = u_x$$

i

$$(v^2 + w^2) = u_r^2$$

je:

$$C_p = - \left(\frac{2u_x}{U_\infty} + \left(1 - M_\infty^2 \right) \left(\frac{u_x}{U_\infty} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{U_\infty} \right)^2 \right) \quad (2.69)$$

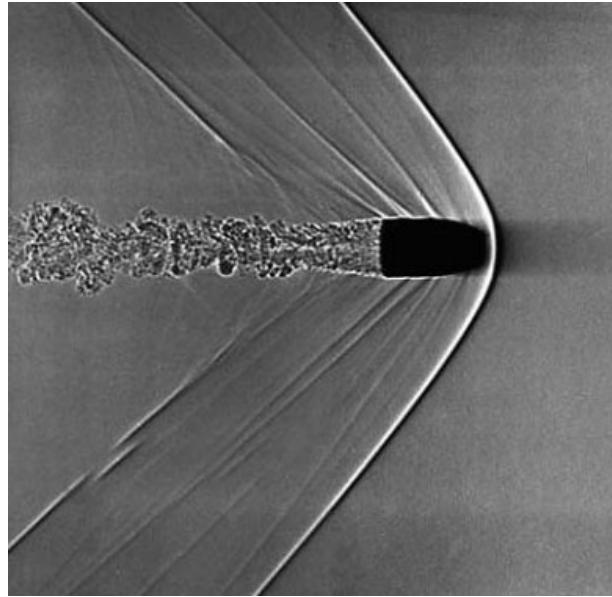
Kako su $\left(\frac{u_x}{U_\infty} \right)^2 i \left(\frac{u_r}{U_\infty} \right)^2 \ll 1$, približan lineariziran koeficijent pritiska izražen preko modifikovanog potencijala aksijalne komponente brzine je:

$$C_p = - \frac{2\phi_x}{M_\infty^2(\gamma+1)} \quad (2.70)$$

Jednačina (2.70) je validna samo za male poremećaje.

2.1.3 Supersonično opstrujavanje

Strujno polje je supersonično ukoliko je Mach-ov broj u svakoj tački veći od jedan. Za ova strujanja je karakterističana pojava udarnih talasa na površini, kroz koje se svojstva strujanja i strujnica mijanjaju skokovito, diskontinuirano (nasuprot glatkim, kontinuiranim promjenama u subsoničnom strujanju).



Slika 2.9: Supersonično opstrujavanje [43]

2.1.3.1 Konusni udarni talas

Pri opstrujavanju konusnog tijela, sa uglom konusa ϑ_c , supersoničnom strujom vazduha u pravcu njegove ose, kao na slici 2.10, stvara se konusan udarni talas pod uglom ϑ_s u odnosu na osu konusnog tijela [45].

Osnovna osobina ove pojave je tzv. konusno strujanje, a to znači da sve veličine strujanja, između udarnog talasa i konusa, zavise samo od ugla ϑ , a ne i od druge koordinate r . Drugim riječima, sve karakteristike vazduha, kao brzina, pritisak, gustina, brzina zvuka i temperatura, iste su na svim konusnim površinama između udarnog talasa i konusa otvora.

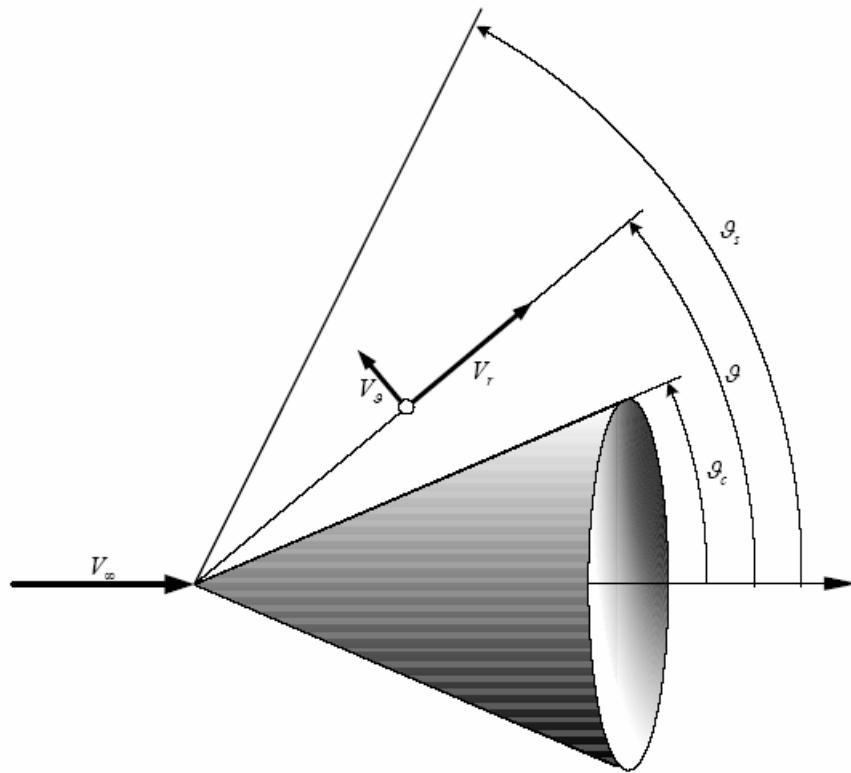
Zato je:

$$\begin{aligned} V_r &= V_r(\vartheta) \\ V_\vartheta &= V_\vartheta(\vartheta) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Kako je iza udarnog talasa strujanje potencijalno (vrtložnost jednaka nuli), možemo uvesti funkciju potencijala, pa je:

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ V_\vartheta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \end{aligned} \quad (2.72)$$

gdje je $\phi = \phi(r, \vartheta)$ potencijal brzine u području između konusa i konusnog udarnog talasa.



Slika 2.10: Opstrujavanje konusa supersoničnom strujom vazduha [45]

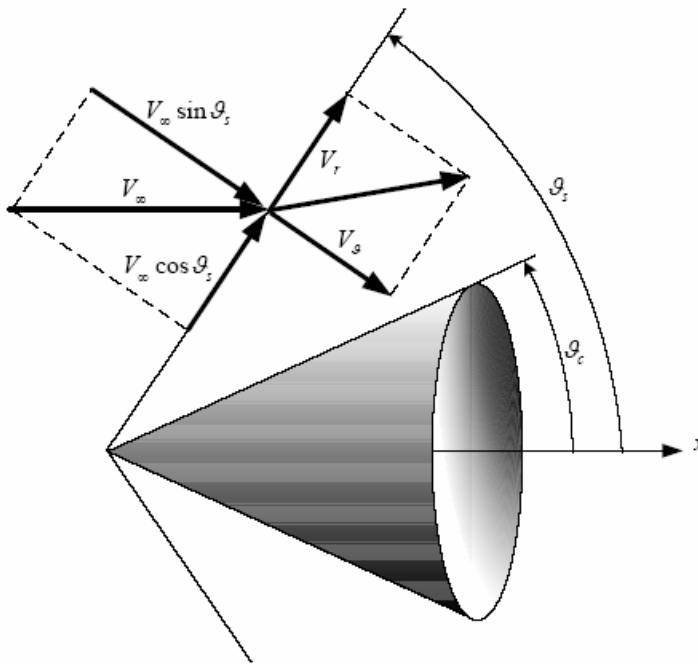
2.1.3.1.1 Diferencijalne jednačine i granični uslovi

Model koji opisuje konusni udarni talas čine tri jednačine sa tri nepoznate funkcije ($V_r(\vartheta)$, $V_g(\vartheta)$, $a(\vartheta)$)[45]:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{V_g^2}{a^2}\right) \frac{dV_g}{d\vartheta} - \frac{V_g V_r}{a^2} \frac{dV_r}{d\vartheta} + 2 \cdot V_r + V_g \operatorname{ctg} \vartheta &= 0 \\ \frac{dV_r}{d\vartheta} &= V_g \\ V_r^2 + V_g^2 + \frac{2a^2}{\gamma - 1} &= V_\infty^2 + \frac{2a_\infty^2}{\gamma - 1} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Kako su dvije jednačine diferencijalne, potrebna su i dva granična uslova [45]:

- Prvi uslov je $V_g(\vartheta_c) = 0$, tj. normalna komponenta brzine na konusu je nula
- Drugi uslov proizilazi iz zakonitosti promjena kroz udarni talas: tangencijalne komponente brzine s obje strane udarnog talasa su jednake, a proizvod normalnih komponenata brzine jednak je kvadratu kritične brzine za pravac okomit na udarni talas.



Slika 2.11: Komponente brzine ispred i iza konusnog udarnog talasa [45]

Ispred konusnog udarnog talasa vrijedi energetska jednačina adijabatskog strujanja:

$$V_{\infty}^2 + \frac{2a_{\infty}^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \quad (2.74)$$

Ako brzinu ispred konusnog udarnog talasa, V_{∞} , razložimo na tangencijalnu i normalnu komponentu na konusni udarni talas i te komponente uvrstimo u jednačinu (2.74) biće:

$$(V_{\infty} \sin \theta_s)^2 + \frac{2a_{\infty}^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(a^{*2} - \underbrace{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\infty}^2 \cos^2 \theta_s}_{a_n^{*2}} \right) \quad (2.75)$$

odakle je:

$$\begin{aligned} a_n^{*2} &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (V_{\infty} \sin \theta_s)^2 + \frac{2a_{\infty}^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\infty}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (V_{\infty} \cos \theta_s)^2 + \frac{2a_{\infty}^2}{\gamma-1} = \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(V_{\infty}^2 + \frac{2a_{\infty}^2}{\gamma-1} \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (V_{\infty} \cos \theta_s)^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_m^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\infty}^2 \cos^2 \theta_s = \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} [V_m^2 - V_r(\theta_s)^2] \end{aligned} \quad (2.76)$$

Pošto su tangencijalne komponente brzine ispred i iza konusnog udarnog talasa jednake, a proizvod normalnih komponenata brzine ispred i iza udarnog talasa jednak kvadratu kritične brzine za strujanje okomito na udarni talas, granični uslov možemo izraziti pomoću dvije jednačine:

$$\begin{aligned} V_r(\vartheta_s) &= V_\infty \cos \vartheta_s \\ V_g(\vartheta_s) \cdot V_\infty \sin \vartheta_s &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} [V_m^2 - [V_r(\vartheta_s)]^2] \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.1.3.2 Metode za određivanje koeficijenta pritiska

Neke od metoda za predviđanje raspodjele pritiska na osnosimetričnom tijelu pri supersoničnim brzinama su:

1. Metod karakteristika
2. Van Dyke-ov metod drugog reda
3. Udar-ekspanzija teorija drugog reda (SOSE)

Metod karakteristika se bazira na dvodimenzionalnoj grafičkoj metodi za rješavanje dvodimenzionalnog ili osnosimetričnog potencijalnog toka pri supersoničnim brzinama.

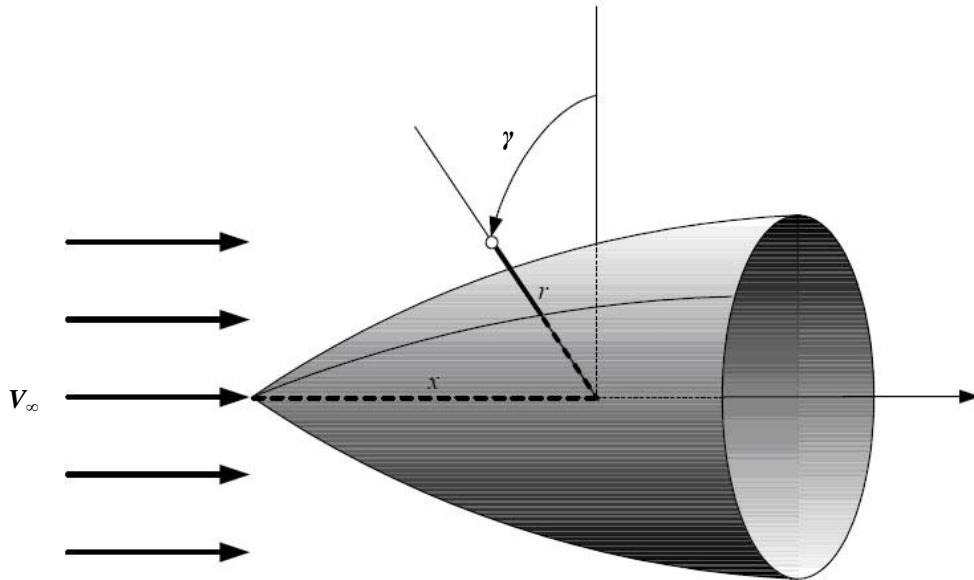
Van Dyke-ov metod drugog reda pogodan je za određivanje raspodjele pritiska na osnosimetričnom tijelu pri nižim supersoničnim brzinama, a zasniva se na redukciji problema drugog reda na problem prvog reda.

Za proračun koeficijenta pritiska pri višim supersoničnim brzinama primjenjuje se udar-ekspanzija teorija drugog reda u kojoj su izrazi što definišu pritiske na tijelu određeni primjenom teorije karakteristika u kombinaciji sa osobinama toka predviđenim opštom metodom udar-ekspanzija.

2.1.3.2.1 Metod karakteristika

Pri razmatranju problema opstrujavanja projektila, vazduh posmatramo kao idealan i savršen gas, pri čemu smatramo da je opstrujavanje adijabatsko i bez utjecaja vanjskih sila. U tom slučaju opstrujavanje je određeno jednačinom kontinuiteta, Euler-ovom jednačinom kretanja, energetskom jednačinom i jednačinom idealnog gasa, dakle sa tri skalarne jednačine i jednom vektorskom, u kojima su nepoznate pritisak p , gustina ρ , komponente brzine u , v i w , i temperatura T . Sistem se može razdvojiti na problem određivanja polja brzina, gustine i pritiska; a zatim određujemo temperaturu kad je prvi problem riješen. To možemo riješiti metodom karakteristika pri čemu je područje u kojem tražimo rješenje između udarnog talasa i površine tijela. Pošto se radi o parcijalnim diferencijalnim jednačinama moramo poznavati nepoznate veličine na nekim površinama u prostoru u kome tražimo rješenje. U ovom slučaju znamo da nepoznate funkcije moraju zadovoljiti uslove na površini udarnog talasa, a na opstrujavanoj površini strujanje mora biti tangencijalno na površini tijela.

Pri opstrujavanju osnosimetričnog tijela, pod nultim napadnim uglom, brzina iz beskonačnosti je paralelna osi tijela. Slika takvog strujanja je osnosimetrična, te je komponenta brzine $w = 0$. U cilindričnim koordinatama opstrujavana površina određena je jednačinom $r = f(x)$.



Slika 2.12: Osnosimetrično opstrujavanje rotacionog tijela [45]

Parcijalna diferencijalna jednačina potencijala u cilindričnim koordinatama je:

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (v^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2uv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} = a^2 \frac{v}{r} \quad (2.78)$$

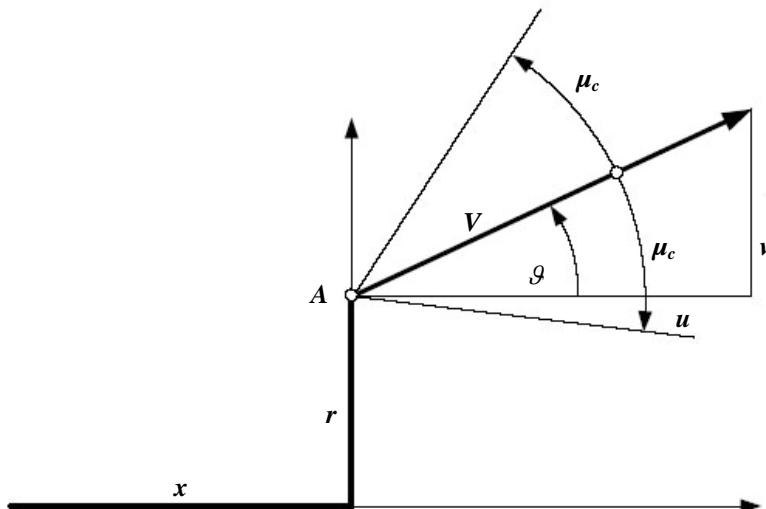
2.1.3.2.1.1 Karakteristike

Ako u jednoj tački prostora A , koja ima cilindrične koordinate x, r , djeluje neki poremećaj, onda će se u konusu otvora μ_c osjećati njegovo djelovanje, a van konusa će strujanje biti neporemećeno.

Pošto je opstrujavanje osnosimetrično posmatrajmo ravan kroz tačku A i osu x . Osa konusa je na pravcu brzine u tački $A(x, r)$, a brzina čini ugao ϑ s osom x .

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v}{u} \quad (2.79)$$

U toj ravni nalazi se brzina V , Mach-ov konus iz tačke A siječe tu ravan duž dva pravca koje nazivamo Mach-ovi pravci (slika 2.13).



Slika 2.13: Poremećaj u jednoj tački prostora

Ta dva pravca imaju nagib prema osi x :

$$\tan(\vartheta \pm \mu_c)$$

Zamislimo dvije familije krivih takvih da u svakoj tački imaju Mach-ove pravce kao tangente. Te krive nazivamo *karakteristike* [45]. Označimo jednačinu karakteristike sa $r(x)$, onda mora biti

$$\frac{dr}{dx} = \tan(\vartheta \pm \mu_c) \quad (2.80)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu karakteristika (za znak + dobivamo jednu familiju karakteristika, a za znak – drugu). Kako su uglovi:

$$\begin{aligned} \tan \vartheta &= \frac{v}{u} \\ \tan \mu_c &= \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

diferencijalne jednačine karakteristika možemo napisati pomoću komponenata brzine i brzine zvuka u posmatranoj tački,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \tan(\vartheta \pm \mu_c) = \frac{\tan \vartheta \pm \tan \mu_c}{1 \mp \tan \vartheta \tan \mu_c} = \frac{\frac{v}{u} \pm \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}}}{1 \mp \frac{v}{u} \cdot \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}}} = \\ &= \frac{v\sqrt{V^2 - a^2} \pm au}{u\sqrt{V^2 - a^2} \mp av} = \frac{V^2(uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2})}{V^2(u^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (2.82)$$

odnosno

$$\frac{dr}{dx} = \tan(\vartheta \pm \mu_c) = \frac{\tan \vartheta \pm \tan \mu_c}{1 \mp \tan \vartheta \tan \mu_c} = \frac{uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \quad (2.83)$$

U supersoničnom strujanju u svakoj je tački $V > a$, ali ako je komponenta duž x ose $u = a$ onda je Mach-ov pravac vertikalni, tj. tangenta na karakteristiku je okomita na x osu.

Označimo sa $r_1(x)$ familiju karakteristika čiji je nagib tangente, u odnosu na osu x , $\vartheta + \mu_c$. Njihova diferencijalna jednačina je:

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{uv + a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \quad (2.84)$$

a sa $r_2(x)$ drugu familiju čiji je nagib tangente $\vartheta - \mu_c$, odnosno koja ima diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \quad (2.85)$$

Sabiranjem ove dvije diferencijalne jednačine familije karakteristika dobije se:

$$\frac{dr_1}{dx} + \frac{dr_2}{dx} = \frac{2uv}{u^2 - a^2} \quad (2.86)$$

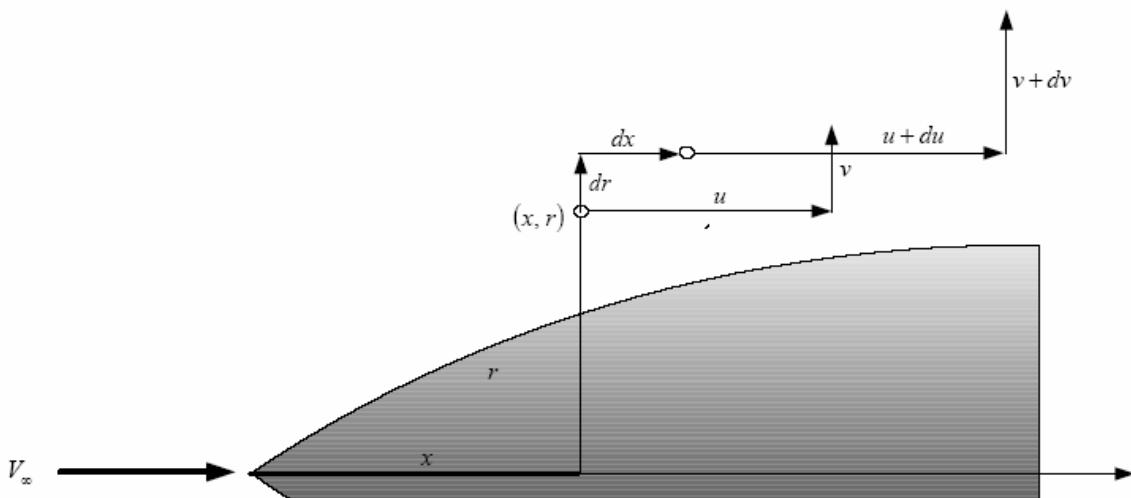
2.1.3.2.1.2 Promjena brzine duž karakteristika

Pomjeranjem za dx i dr (slika 2.14) iza udarnog talasa, komponente brzina se promjene za [45]:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial r} dr \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ako je promjena komponenata brzine du i dv duž nekog pravca, onda je dr/dx tangens tog pravca. Prema tome, promjena komponenata brzine duž karakteristika je data jednačinom (2.83):

$$\frac{dr}{dx} = \frac{uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2}$$



Slika 2.14: Pomjeranje iza udarnog talasa [45]

Prepostavimo da je strujanje potencijalno (ta prepostavka je jedna aproksimacija, jer je ona ispunjena samo kad je udarni talas konusan), onda su priraštaji komponenata brzina duž elementarnog pomaka dx, dr :

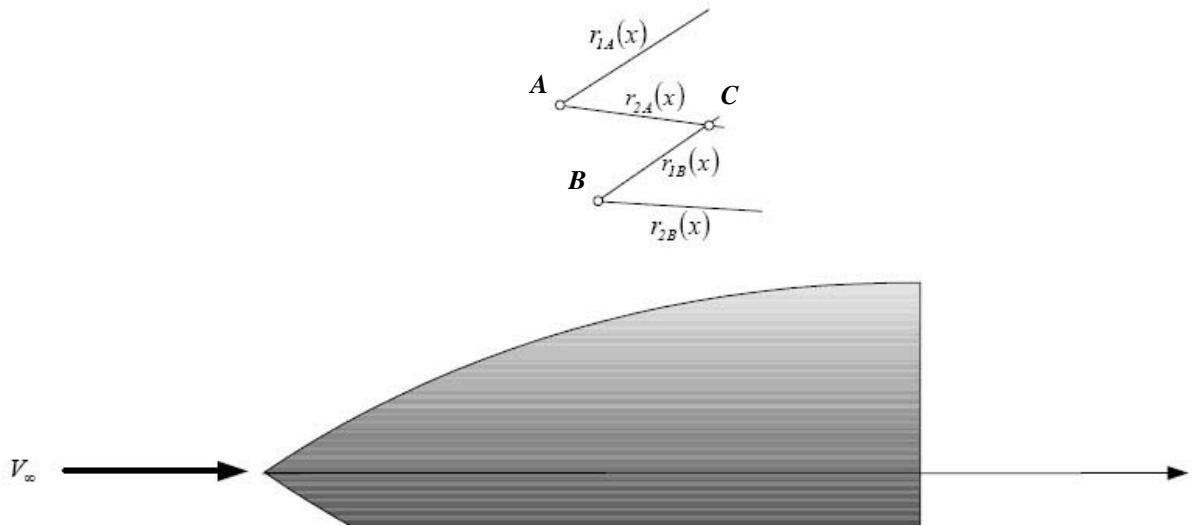
$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} dr \\ dv &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} dr \end{aligned} \quad (2.88)$$

u kojima druge parcijalne derivacije potencijala moraju zadovoljavati diferencijalnu jednačinu potencijala (2.78):

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (v^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2uv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} = a^2 \frac{v}{r}$$

Metoda karakteristika daje diferencijalne jednačine koje određuju $dr_1, du_1, dv_1, dr_2, du_2, dv_2$, zavisno od dx , dakle šest nepoznatih. Međutim, na raspolaganju su nam četiri jednačine.

Neka su poznate komponente brzine u dvjema tačkama A i B , a tražimo komponente brzine u trećoj tački C koja je presjeku karakteristike $r_{2A}(x)$ i karakteristike $r_{1B}(x)$ kao na slici 2.15.



Slika 2.15: Karakteristike tri tačke [45]

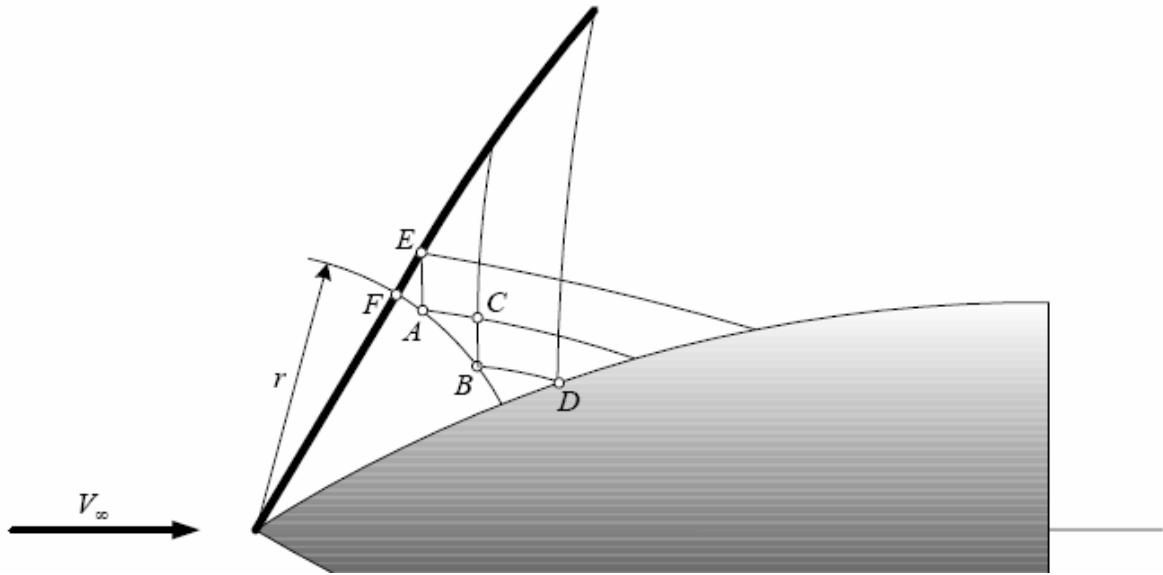
Pretpostavimo da su tačke A i B dovoljno bliske da možemo diferencijale koordinata zamijeniti sa razlikama. Duž karakteristike $r_{2A}(x)$ od tačke A do tačke C može se primijeniti diferencijalna jednačina karakteristike druge familije i diferencijalna jednačina promjene komponenta brzine duž te karakteristike:

$$\begin{aligned} r_{2C} - r_{2A} &= \left(\frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \right)_A \cdot (x_C - x_A) \\ &\quad \left(uv + a\sqrt{V^2 - a^2} \right)_A \cdot (v_C - v_A) + (u^2 - a^2)_A \cdot (u_C - u_A) = \left(a^2 \frac{u}{r} \right)_A \cdot (x_C - x_A) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Isto tako duž prve karakteristike od tačke B do tačke C možemo primijeniti diferencijalnu jednačinu prve karakteristike i diferencijalnu jednačinu promjene komponenata brzine duž nje:

$$\begin{aligned} r_{1C} - r_{1B} &= \left(\frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \right)_B \cdot (x_C - x_B) \\ &\quad \left(uv + a\sqrt{V^2 - a^2} \right)_B \cdot (v_C - v_B) + (u^2 - a^2)_B \cdot (u_C - u_B) = \left(a^2 \frac{u}{r} \right)_B \cdot (x_C - x_B) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Da bi odredili slijedeću tačku iznad ili ispod tačke C treba nam tačka iznad tačke A , odnosno tačka ispod tačke B . Drugim riječima treba nam cijeli niz tačaka u kome se nalaze tačke A i tačka B . To je početni uslov. Njega možemo odrediti npr. ako početni dio oživala, do udaljenosti r od vrha, zamijenimo s tangentnim konusom te izračunamo brzine (koje su funkcije samo ugla ϑ) do udaljenosti r i ugao konusnog udarnog talasa kao i brzine odmah iza udarnog talasa, kao na slici 2.16.



Slika 2.16: Metod karakteristika kod oživila [45]

U slučaju tačke D na površini tijela koristi se jednačina karakteristike BD i jednačina promjene komponenata brzine duž te karakteristike, zatim jednačina površine tijela i jednačina o tangentnoj brzini na površinu tijela.

$$\begin{aligned}
 r_{2D} - r_{2B} &= \left(\frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \right)_B \cdot (x_D - x_B) \\
 (uv + a\sqrt{V^2 - a^2})_B \cdot (v_D - v_B) + (u^2 - a^2)_B \cdot (u_D - u_B) &= \left(a^2 \frac{u}{r} \right)_B \cdot (x_D - x_B) \quad (2.91) \\
 r_D &= f(x_D) \\
 v_D &= u_D f'(x_D)
 \end{aligned}$$

Konačno treba odrediti tačku E na udarnom talasu. Ona se određuje prije svega kao tačka na karakteristici AE pa je i promjena brzine od tačke A do tačke E u skladu s diferencijalnom jednačinom o promjeni komponenata brzine duž karakteristike AE :

$$\begin{aligned}
 r_{2E} - r_{2A} &= \left(\frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \right)_A \cdot (x_E - x_A) \\
 (uv + a\sqrt{V^2 - a^2})_A \cdot (v_E - v_A) + (u^2 - a^2)_A \cdot (u_E - u_A) &= \left(a^2 \frac{u}{r} \right)_A \cdot (x_E - x_A) \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

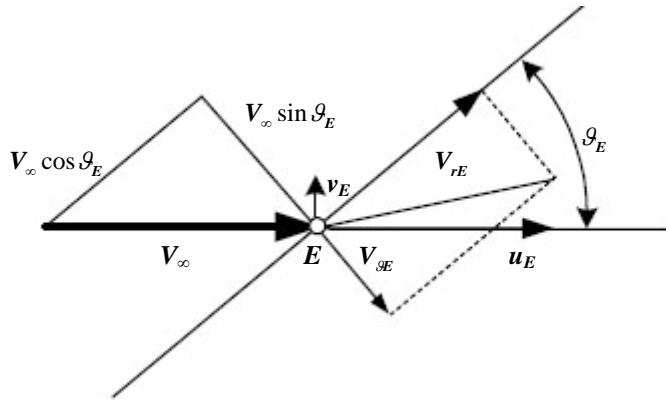
Druge dvije jednačine trebaju se bazirati na činjenici da je tačka E na udarnom talasu, te da komponente brzine u tački E moraju isto zadovoljavati uslove na udarnom talasu pri čemu u tački E lokalni nagib udarnog talasa ϑ_E nije jednak ugлу ϑ_s jer je udarni talas zakrivljen.

$$\begin{aligned}
 V_{rE} &= V_\infty \cos \vartheta_E \\
 V_{\vartheta E} \cdot V_\infty \sin \vartheta_E &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(V_\infty^2 \sin^2 \vartheta_E + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \right) \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

Konstantu na desnoj strani drugog uslova možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(V_\infty^2 \sin^2 \vartheta_E + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} \right) &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\underbrace{V_\infty^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}}_{V_{\max}^2} - V_\infty^2 \cos^2 \vartheta_E \right) = \\
 &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot V_{\max}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\infty^2 \cos^2 \vartheta_E = \\
 &= a_{cr}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\infty^2 \cos^2 \vartheta_E
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Zamjenimo cilindrične komponente brzine sa kartezijskim u, v .



Slika 2.17: Veza između cilindričnih i kartezijskih koordinata

$$\begin{bmatrix} V_{rE} \\ -V_{\theta E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_E & \sin \vartheta_E \\ -\sin \vartheta_E & \cos \vartheta_E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_E \\ v_E \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

ili

$$\begin{aligned}
 V_{rE} &= u_E \cos \vartheta_E + v_E \sin \vartheta_E \\
 V_{\theta E} &= u_E \sin \vartheta_E - v_E \cos \vartheta_E
 \end{aligned} \tag{2.95'}$$

Zamjenom u uslove na udarnom talasu (2.77), dobivamo:

$$\begin{aligned}
 u_E \cos \vartheta_E + v_E \sin \vartheta_E &= V_\infty \cos \vartheta_E \\
 (u_E \sin \vartheta_E - v_E \cos \vartheta_E) \cdot V_\infty \sin \vartheta_E &= a_{cr}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\infty^2 \cos^2 \vartheta_E
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Iz prve jednačine slijedi da je:

$$\operatorname{tg} \vartheta_E = \frac{V_\infty - u_E}{v_E} \tag{2.97}$$

Drugu jednačinu podijelimo sa $\cos^2 \vartheta_E$

$$(u_E \operatorname{tg} \vartheta_E - v_E) \cdot V_\infty \operatorname{tg} \vartheta_E = \frac{a_{cr}^2}{\cos^2 \vartheta_E} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\infty^2 \tag{2.98}$$

a zatim zamjenimo $\operatorname{tg} \vartheta_E$ dobiveno iz prve jednačine

$$\left(u_E \frac{V_\infty - u_E}{v_E} - v_E \right) \cdot V_\infty \frac{V_\infty - u_E}{v_E} = a_{cr}^2 \left[1 + \frac{(V_\infty - u_E)^2}{v_E^2} \right] - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_\infty^2 \quad (2.99)$$

Nakon sređivanja se dobije:

$$v_E^2 = (V_\infty - u_E)^2 \frac{\frac{a_{cr}^2}{V_\infty} - u_E}{u_E - \frac{2}{\gamma + 1} V_\infty - \frac{a_{cr}^2}{V_\infty}} \quad (2.100)$$

Jednačina udarnog talasa se može zamjeniti tangentom:

$$r_E - r_F = (x_E - x_F) \operatorname{tg} \vartheta_E \quad (2.101)$$

pa je formiran sistem od pet jednačina sa pet nepoznatih:

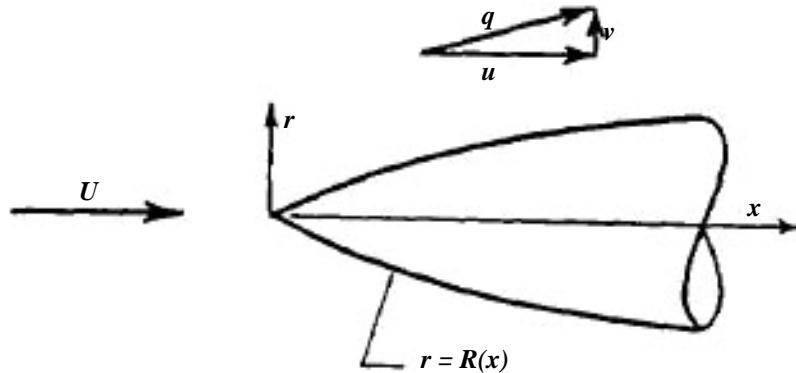
$$\begin{aligned} r_{2E} - r_{2A} &= \left(\frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} \right)_A \cdot (x_E - x_A) \\ (uv + a\sqrt{V^2 - a^2})_A \cdot (v_E - v_A) + (u^2 - a^2)_A \cdot (u_E - u_A) &= \left(a^2 \frac{u}{r} \right)_A \cdot (x_E - x_A) \\ r_E - r_F &= (x_E - x_F) \operatorname{tg} \vartheta_E \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_E &= \frac{V_\infty - u_E}{v_E} \\ v_E^2 &= (V_\infty - u_E)^2 \frac{\frac{a_{cr}^2}{V_\infty} - u_E}{u_E - \frac{2}{\gamma + 1} V_\infty - \frac{a_{cr}^2}{V_\infty}} \end{aligned}$$

2.1.3.2.2 Van Dyke-ova teorija

Za predviđanje raspodjele pritiska na osnosimetričnom tijelu kod opstrujavanja supersoničnim brzinama, pri nultom napadnom uglu, linearizovana teorija ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Pri umjerenim supersoničnim brzinama, tok koji opstrujeva vitko osnosimetrično tijelo je najbliži izentropskom i nevrložnom.



Slika 2.18: Osnosimetrično opstrujavanje rotacionog tijela (dvodimenzionalno)

S ovom aproksimacijom egzistira potencijal poremećaja ϕ čiji izvodi daju brzinu poremećaja [27], tj.:

$$\begin{aligned}\frac{u}{U} &= 1 + \phi_x \\ \frac{v}{U} &= \phi_r\end{aligned}\quad (2.103)$$

Jednačine koje opisuju kretanja fluida (jednačina kontinuiteta, Euler-ova jednačina - jednačina količine kretanja, energetska jednačina) se kombinuju u jednu jednačinu [27]:

$$\phi_{rr} + \frac{\phi_r}{r} - \beta^2 \phi_{xx} = M^2 [2(N-1)\beta^2 \phi_x \phi_{xx} + 2\phi_r \phi_{xr} + \phi_r^2 \phi_{rr} + \text{ostali kubni izrazi}] \quad (2.104)$$

gdje je:

$$\beta^2 = M^2 - 1$$

$$N = \frac{\gamma+1}{2} \frac{M^2}{\beta^2}$$

Svi linearni izrazi se grupišu na lijevoj strani jednačine, a kvadratni i kubni na desnoj. Obuhvačen je samo kubni izraz koji daje udio drugog reda.

Ova jednačina se rješava zavisno od graničnih uslova [27]:

- nema poremećaja ispred tijela, i
- tok je tangentan na površinu tijela.

Pošto je jednačina nelinearna ne može se riješiti direktno, pa je usvojen metod sukcesivnih aproksimacija – tako zvana Prandtl-Busemann-ova iterativna procedura.

U prvoj aproksimaciji se može zanemariti nelinearna desna strana jednačine. Potencijal poremećaja prvog reda φ zadovoljava talasnu jednačinu linearizovane supersonične teorije [39]:

$$\varphi_{rr} + \frac{\varphi_r}{r} - \beta^2 \varphi_{xx} = 0 \quad (2.105)$$

U drugoj aproksimaciji, nelinearna desna strana jednačine se ne može zanemariti ali se približno razvija pomoću izraza prethodno određenih rješenjem prvog reda. Prema tome, potencijal poremećaja drugog reda ψ zadovoljava nehomogenu talasnu jednačinu:

$$\phi_{rr} + \frac{\phi_r}{r} - \beta^2 \phi_{xx} = M^2 [2(N-1)\beta^2 \varphi_x \varphi_{xx} + 2\varphi_r \varphi_{xr} + \varphi_r^2 \varphi_{rr}] \quad (2.106)$$

Rješavanje problema drugog reda je značajno pojednostavljeno otkrićem da se partikularni integral ψ jednačine iteracije može dati u obliku rješenja prvog reda pomoću [27]:

$$\psi = M^2 \left[\varphi_x (\varphi + Nr\varphi_r) - \frac{1}{4} r \varphi_r^3 \right] \quad (2.107)$$

tako da je:

$$\begin{aligned}\psi_x &= M^2 \left[\varphi_{xx} (\varphi + Nr\varphi_r) + \varphi_x (\varphi_x + Nr\varphi_{xr}) - \frac{3}{4} r \varphi_{xr} \varphi_r^2 \right] \\ \psi_r &= M^2 \left[\varphi_{xr} (\varphi + Nr\varphi_r) + \varphi_x ((N+1)\varphi_r + Nr\varphi_{rr}) - \frac{1}{4} \varphi_r^2 (\varphi_r + 3r\varphi_{rr}) \right]\end{aligned}\quad (2.108)$$

Ovo problem drugog reda reducira u formu problema prvog reda, jer je nehomogena jednačina iteracije reducirana u homogenu jednačinu teorije prvog reda. Ukupan potencijal drugog reda sastoji se od sume partikularnog integrala i dopunske funkcije χ , što zahtijeva ponovno utvrđivanje graničnih uslova [27]:

$$\phi = \psi + \chi \quad (2.109)$$

Dopunska funkcija χ je rješenje jednačine prvog reda, pri čemu se χ razlikuje od potencijala prvog reda φ samo u tome što je tangentni uslov komplikovaniji.

Ako je tijelo definisano krivom $r = R(x)$, tačan tangentni uslov za jednačinu (2.104) glasi:

$$\phi_r = R'(1 + \phi_x) \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.110)$$

Tačni tangentni uslovi koji odgovaraju problemima prvog i drugog reda su:

$$\varphi_r = R'(1 + \varphi_x) \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.111)$$

i

$$\phi_r = R'(1 + \phi_x) \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.112)$$

Iz prvog uslova, prema teoriji prvog reda, može se zanemariti veličina φ_x koja je mala u poređenju sa jedinicom, pa približni tangentni uslov za problem prvog reda glasi:

$$\varphi_r = R' \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.113)$$

Slično, u drugom uslovu se izraz ϕ_x može zamijeniti odgovarajućim izrazom prvog reda, pa približni tangentni uslov drugog reda postaje:

$$\phi_r = R'(1 + \varphi_x) \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.114)$$

odnosno, razdvajanjem izraza drugog reda na partikularni integral i dopunsku funkciju, a grupisanjem poznatih vrijednosti na desnu stranu moguće je odrediti:

$$\chi_r = R'(1 + \varphi_x) - \psi_r \quad \text{za } r = R(x) \quad (2.115)$$

2.1.3.2.2.1 Koeficijent pritiska

Nakon što se odrede komponente brzine, koeficijent pritiska se može odrediti pomoću izraza [27]:

$$C_p = \frac{2}{\gamma \cdot M^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left(1 - (1 + \phi_x)^2 - \phi_r^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (2.116)$$

2.1.3.2.2.2 Partikularno rješenje za osnosimetrični tok

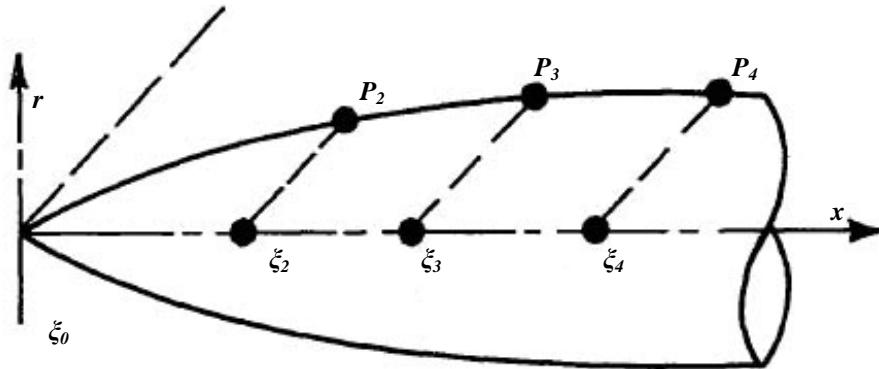
Kriva merdijana glatkog tijela se može predstaviti u obliku [27]:

$$r = R(x) = \varepsilon g(x) \quad x \geq 0 \quad (2.117)$$

Ovdje je ε parametar koji je mali u poređenju sa jedinicom, a $g(x)$ neprekidna funkcija koja nestaje za $x \leq 0$.

Problem prvog reda, pri osnosimetričnom opstrujavanju, je:

$$\begin{aligned}\phi_{rr} + \frac{\phi_r}{r} - \beta^2 \phi_{xx} &= 0 \\ \phi_r(x, r) &= R' [1 + \phi_x(x, r)] \\ \phi(0, r) &= \phi_x(0, r) = 0\end{aligned}\tag{2.118}$$



Slika 2.19: Metod rješavanja za glatka tijela [27]

Osa je podijeljena u intervalu izborom tačaka u kojima počinju linije izvora a čije su apcise ξ_n . Dobra tačnost se postiže ako dužina intervala nije veća od proizvoda β i lokalnog radijusa. Tangentni uslov se postavlja u tački P_n na površini tijela u kojoj leži Mach-ova linija iz tačke ξ_n .

Za šiljata tijela, rješenje prvog reda počinje sa konusnim izvorom iz koordinatnog početka koji daje odgovarajući konusni vrh.

Potencijal i njegovi derivati su [27]:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= -C_0 x \cdot (\sec h^{-1} t - \sqrt{1-t^2}) \\ (\phi_0)_x &= -C_0 \sec h^{-1} t \\ (\phi_0)_r &= \beta \cdot C_0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\ (\phi_0)_{xx} &= -\frac{C_0}{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ (\phi_0)_{xr} &= \frac{\beta \cdot C_0}{x} \frac{1}{t \sqrt{1-t^2}} \\ (\phi_0)_{rr} &= -\frac{\beta^2 C_0}{x} \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}}\end{aligned}\tag{2.119}$$

gdje je:

$$C_0 = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \sec h^{-1} \beta \varepsilon}$$

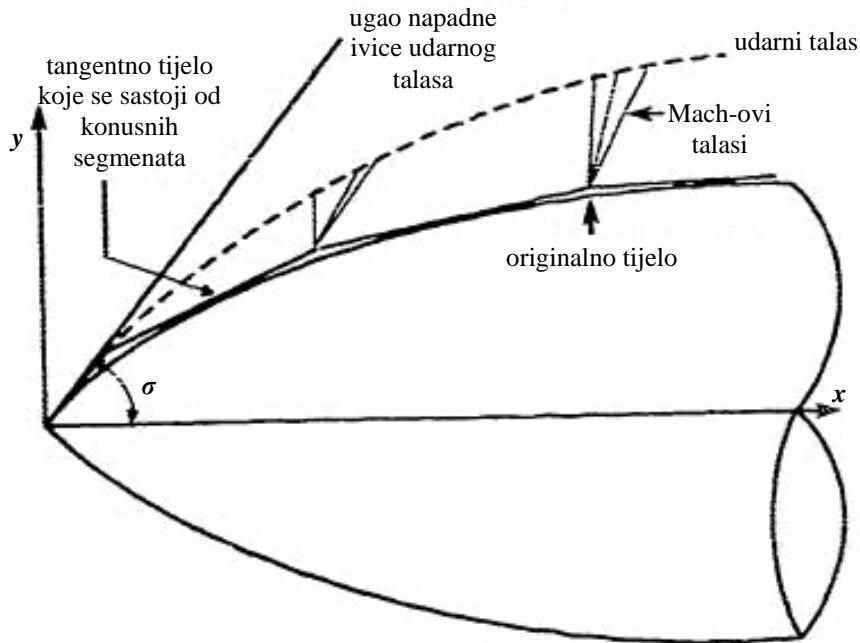
a $\tan^{-1} \varepsilon$ je poluugao konusa koji tangira tijelo u vrhu. Za šiljato tijelo tačka ξ_1 je takođe u koordinatnom početku.

Za n -tu liniju izvora, potencijal i njegovi derivati su [27]:

$$\begin{aligned}
 \phi_n &= -C_n(x - \xi_n)^2 \left(\left(1 + \frac{1}{2} \tau_n^2 \right) \sec h^{-1} \tau_n - \frac{3}{2} \sqrt{1 - \tau_n^2} \right) \\
 (\phi_n)_x &= -2C_n(x - \xi_n) \left(\sec h^{-1} \tau_n - \sqrt{1 - \tau_n^2} \right) \\
 (\phi_n)_r &= \beta C_n(x - \xi_n) \left(\frac{\sqrt{1 - \tau_n^2}}{\tau_n} - \tau_n \sec h^{-1} \tau_n \right) \\
 (\phi_n)_{xx} &= -2C_n \sec h^{-1} \tau_n \\
 (\phi_n)_{xr} &= 2\beta C_n \frac{\sqrt{1 - \tau_n^2}}{\tau_n} \\
 (\phi_n)_{rr} &= -\beta^2 C_n \left(\frac{\sqrt{1 - \tau_n^2}}{\tau_n^2} + \sec h^{-1} \tau_n \right)
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

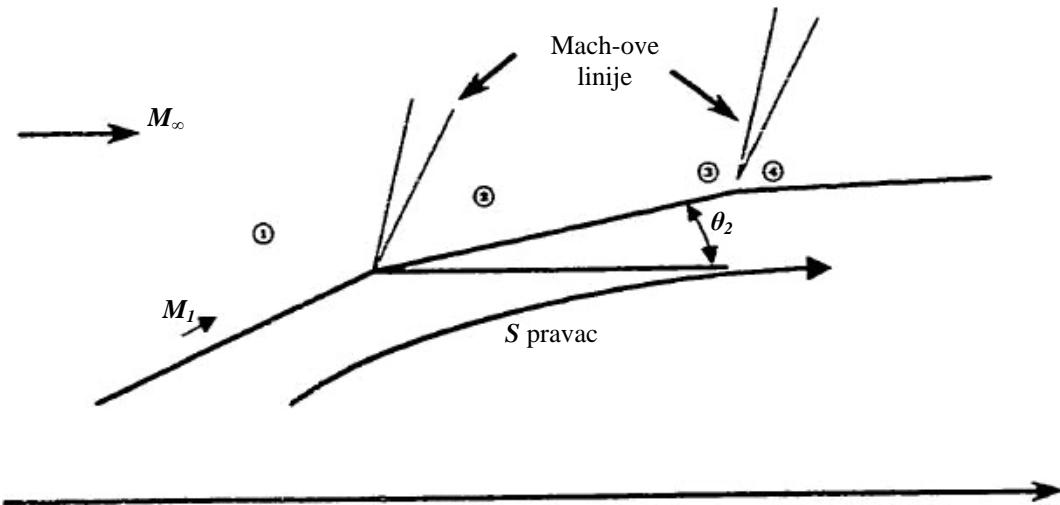
2.1.3.2.3 Udar-ekspanzija teorija drugog reda

Ova teorija primjenjiva je na osnosimetrična tijela pri supersoničnom opstrujavanju pod nultim napadnim uglom. Originalno tijelo se aproksimira konusnim segmentima koji tangiraju tijelo. Izrazi koji definišu pritisak su određeni upotrebom teorije karakteristika u kombinaciji sa osobinama toka predviđenog pomoću generaliziranog udar-ekspanzija metoda.



Slika 2.20: Površina tijela aproksimirana tijelima koja tangiraju originalno tijelo [14]

U generaliziranom metodu pritisak se smatra konstantnim duž prve familije Mach-ovih linija. Metod daje tačnu promjenu pritiska oko uglova na tangentnom tijelu, ali predviđa da nema promjene pritiska duž ravne linije elementa.



Slika 2.21: Tok oko konusnog elementa [14]

Syvertson [9] je proširio generaliziranu teoriju udar-ekspanzija na šiljata tijela i nazvao ju je teorija drugog reda. Definisao je pritisak duž konusnog elementa koji tangira površinu originalnog tijela izrazom:

$$p = p_C - (p_C - p_2) \cdot e^{-\eta} \quad (2.121)$$

umjesto konstante na svakom segmentu što je slučaj u generaliziranoj teoriji, pri čemu je p_C pritisak na konusu sa datim poluuglom konusa jednakim nagibu konusnog segmenta u odnosu na osu simetrije, a p_2 je pritisak neposredno iza konusnog segmenta koji se računa pomoću Prandtl-Meyer-ove ekspanzije.

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot M_\infty^2 \cdot \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (2.122)$$

Takođe je:

$$\eta = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_2 (s - s_2)}{p_C - p_2} \quad (2.123)$$

pri čemu je s put na omotaču.

Gradijent pritiska se može aproksimirati:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_2 = \frac{B_2}{r} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \sin \theta_2 - \sin \theta_2 \right) + \frac{B_2}{B_1} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_1 \quad (2.124)$$

gdje su:

$$B_{1,2} = \frac{\gamma \cdot p \cdot M_{1,2}^2}{2 \cdot (M_{1,2}^2 - 1)}$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{M_{1,2}} \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1,2}^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma - 1}}$$

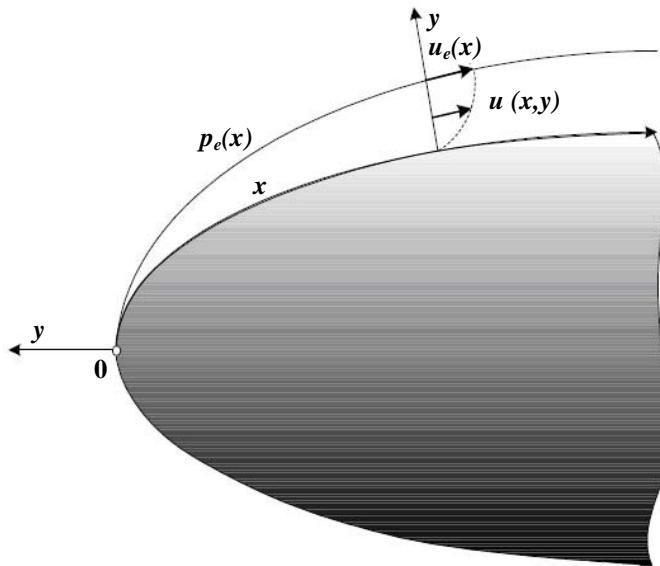
Indeks 1 se odnosi na uslove koji vladaju neposredno ispred početka konusnog segmenta, a indeks 2 na uslove neposredno iza početka konusnog segmenta (slika 2.21).

2.2 Trenje

2.2.1 Osnovne postavke nestišljivog graničnog sloja

U tankom sloju oko tijela prevladavaju viskozne sile zbog kojih brzina u graničnom sloju raste od nule na površini tijela do lokalne brzine opstrujavanja neviskoznim strujanjem. S obzirom da je granični sloj jako tanak, geometrijski zanemarujemo utjecaj zakrivljenosti površine na strujanje u graničnom sloju. Zakrivljenost graničnog sloja uzima se u obzir posredno preko promjene pritiska duž graničnog sloja. Zato posmatramo granični sloj na ravnoj površini, ali s uzdužnom promjenom pritiska i s promjenom vanjske brzine kakve su u zakrivljenom graničnom sloju, dok poprečnu promjenu pritiska zanemarujemo. Ovaj model graničnog sloja obično upotrebljavamo u sukcesivnom rješavanju opstrujavanja tijela, a to znači: prvo posmatramo opstrujavanje tijela zanemarujući postojanje graničnog sloja (opstrujavanje neviskoznim fluidom), zatim usvajamo da je uzdužna promjena pritiska i vanjske brzine na graničnom sloju ista kao promjena pritiska i vanjske brzine koju smo dobili na tijelu bez viskoznih sila. To je opravdano zato što je promjena pritiska okomito na granični sloj neznatna pa smatramo da je pritisak konstantan u poprečnom presjeku graničnog sloja.

Ishodište koordinatnog sistema za izučavanje graničnog sloja postavljamo u zaustavnoj tački opstrujavanja tijela ili u vrhu tijela (na napadnom rubu krila itd.). Osa x je na opstrujavanoj površini u pravcu strujanja, a osa y je okomita na opstrujavanu površinu (na tijelo).



Slika 2.22: Zakrivljeni granični sloj [44]

2.2.2 Nestišljivi laminarni granični sloj

Bitna osobina laminarnog graničnog sloja je Newton-ov zakon koji govori o proporcionalnosti tangencijalnog napona i gradijenta uzdužne brzine:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.125)$$

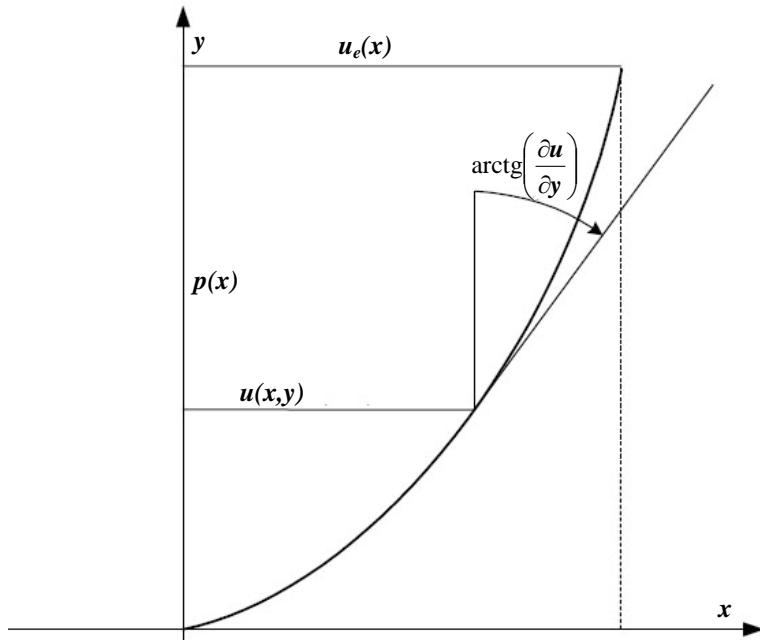
gdje je μ koeficijent viskoznosti. Koeficijent viskoznosti podijeljen s gustoćom, μ/ρ , nazivamo koeficijent kinematske viskoznosti. Promjenu bezdimenzionalne brzine, $\bar{u} = u/u_e$, u graničnom sloju okomito na granični sloj ovisno o bezdimenzionalnoj koordinati $\bar{y} = y/\delta$, nazivamo profil brzine. U nestišljivom strujanju gustina je konstantna, a smatrati ćemo konstantnim i koeficijent viskoznosti μ , pa je i koeficijent kinematske viskoznosti, μ/ρ , konstantan. Tako za nestišljivo laminarno strujanje u graničnom sloju imamo tri jednačine [44]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v &= u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \tau &= \mu \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.126}$$

Eleminacijom tangencijalnog napona τ dobivamo dvije parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v &= u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{2.127}$$

iz kojih određujemo dvije nepoznate funkcije: $u(x,y)$ i $v(x,y)$.



Slika 2.23: Profil brzine u graničnom sloju

2.2.3 Rješenje pomoću strujne funkcije - *Falkner-Skan* jednačina

Prva parcijalna diferencijalna jednačina biće zadovoljena ako umjesto brzina u i v tražimo funkciju $\psi(x,y)$ [44], čije su parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -v \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u\end{aligned}\tag{2.128}$$

Zaista, tada je prva jednačina zadovoljena zato što je:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0\tag{2.129}$$

funkcija $\psi(x, y) = \text{const.}$ predstavlja strujnicu. U graničnom sloju ne možemo koristiti potencijal zato što je zbog viskoznosti rotor brzine različit od nule.

Da bi našli funkciju ψ koja zadovoljava drugu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, na mjesto krivolinijskih koordinata x, y , uvodimo nove varijable ξ, η .

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \int u_e(x) dx \\ \eta(x, y) &= y \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}}\end{aligned}\tag{2.130}$$

U slučaju kad je brzina $u_e(x)$ poznata funkcija koordinate x , funkciju $\psi(\xi, \eta)$ tražimo u obliku:

$$\psi = \sqrt{\xi} \cdot F(\eta)\tag{2.131}$$

što znači da umjesto nepoznate funkcije $\psi(\xi, \eta)$, od dvije varijable, što vodi u problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednačine, tražimo funkciju $F(\eta)$, tj. rješava se jedna obična diferencijalna jednačina. Tu funkciju $F(\eta)$ treba odrediti tako da bude zadovoljena druga parcijalna diferencijalna jednačina. Zato treba drugu parcijalnu jednačinu transformisati tj. na mjesto funkcije ψ treba uvrstiti njen novi oblik $\sqrt{\xi} \cdot F(\eta)$. Da bi izvršili ovu substituciju, odrede se prvo komponente brzina u i v kao parcijalne derivacije funkcije $\psi = \sqrt{\xi} \cdot F(\eta)$.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\tag{2.132}$$

Prema jednačinama transformacija:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}}\end{aligned}\tag{2.133}$$

a prema definiciji funkcije $\psi = \sqrt{\xi} \cdot F(\eta)$ biće $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{\xi} \cdot F'$.

Zamjenom ovih vrijednosti u jednačinu za komponentu brzine u , prva komponenta brzine izrađena pomoću funkcije F ima oblik:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot 0 + \sqrt{\xi} \cdot F' \cdot \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}}\tag{2.134}$$

odnosno

$$u = \frac{F'(\eta)}{\sqrt{2(\mu/\rho)}} \cdot u_e\tag{2.135}$$

Ovu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$\frac{u}{u_e} = f'(\eta) \quad (2.136)$$

gdje je $f(\eta) = \frac{F(\eta)}{\sqrt{2(\mu/\rho)}}$ funkcija profila brzine u nestišljivom laminarnom graničnom sloju.

Za određivanje druge komponente brzine, v , zavisno od funkcije F , polazi se od:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.137)$$

Prema prvoj jednačini trasformacija:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dx} = u_e \quad (2.138)$$

a prema definiciji funkcije $\psi = \sqrt{\xi} \cdot F(\eta)$ je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{1}{2\sqrt{\xi}} F \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= \sqrt{\xi} \cdot F' \end{aligned} \quad (2.139)$$

Zamjenom ovih vrijednosti dobivamo da je druga komponenta brzine izražena pomoću funkcije F :

$$v = -\frac{1}{2\sqrt{\xi}} F \cdot u_e - \sqrt{\xi} \cdot F' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.140)$$

odnosno pomoću funkcije f :

$$v = -\left(\frac{\sqrt{2(\mu/\rho)}}{2\sqrt{\xi}} \cdot f \cdot u_e + \sqrt{\xi} \sqrt{2(\mu/\rho)} \cdot f' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\left(\sqrt{\frac{\mu/\rho}{2\xi}} \cdot f \cdot u_e + \sqrt{2(\mu/\rho)\xi} \cdot f' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (2.141)$$

Parcijalne derivacije prve komponente brzine u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du_e}{dx} f' + u_e \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{du_e}{dx} f' + u_e \left(\underbrace{\frac{\partial f'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}}_0 + \underbrace{\frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{F'} \right) = \frac{du_e}{dx} f' + u_e f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_e f'' \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} = \frac{u_e^2}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} \cdot f'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_e^2}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} \cdot f''' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_e^2}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} \cdot f''' \cdot \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} = \frac{u_e^3}{2(\mu/\rho)\xi} \cdot f''' \end{aligned} \quad (2.142)$$

Zamijenom ovih rezultata za komponente brzine i njene derivacije, ovisno o funkciji f , u drugu jednačinu sistema jednačina (2.127):

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dobivamo, poslije sređivanja, *Falkner-Skan jednačinu*:

$$f \cdot f'' + f''' + (1 - f'^2) \frac{2\xi}{u_e^2} \frac{du_e}{dx} = 0 \quad (2.143)$$

Za rješenje ove diferencijalne jednačine trećeg reda potrebna su tri uslova. Znamo da je:

$$\begin{aligned} u &= u_e f'(\eta) \\ \eta &= y \cdot \frac{u_e}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} \end{aligned} \quad (2.144)$$

pa je na opstrujavanoj površini $\eta = 0$, a da bi na njoj u bilo jednako 0 mora biti:

$$f'(0) = 0 \quad (2.145)$$

Na opstrujavanoj površini mora biti i komponenta brzine $v = 0$, pa primjenom jednačine

$$v = -\frac{u_e}{2} \sqrt{\frac{2(\mu/\rho)}{\xi}} \cdot f - \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{2(\mu/\rho) \cdot \xi} \cdot f' \quad (2.146)$$

u tački na opstrujavanoj površini dobivamo da mora biti:

$$0 = -\frac{u_e}{2} \sqrt{\frac{2(\mu/\rho)}{\xi}} \cdot f(0) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{2(\mu/\rho) \cdot \xi} \cdot f'(0) \quad (2.147)$$

Kako je $f'(0) = 0$, to mora biti i $f(0) = 0$.

Za uslov na vanjskom rubu graničnog sloja moraju biti ispunjena dva uslova:

$$\begin{aligned} u &= u_e f'(\eta) = u_e \\ \tau_e &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_e = \mu \cdot \frac{u_e^2}{\sqrt{2(\mu/\rho)\xi}} f''(\eta_e) = 0 \end{aligned} \quad (2.148)$$

odnosno

$$\begin{aligned} f'(\eta_e) &= 1 \\ f''(\eta_e) &= 0 \end{aligned} \quad (2.149)$$

iz kojih eliminacijom η_e dobivamo treći uslov. Međutim granica između neviskoznog i viskoznog opstrujavanja ne postoji. Zato se uslov $f'(\eta_e) = 1$, tj. $u = u_e$ zadovoljava asimptotski. U praksi usvajamo da nema više viskoznih sila kada je brzina $u = 0.99 \cdot u_e$, pa umjesto teoretskog uslova $f'(\eta_e) = 1$ koristimo $f'(\eta_e) = 0.99$.

2.2.4 Tranzicija

Prelazak iz laminarnog u turbulentni granični sloj ne događa se na jednom određenom mjestu. Gdje u graničnom sloju nastaje tranzicija i kolika joj je dužina ovisi o mnogo faktora od kojih su bitni:

- gradijent pritiska,
- hrapavost površine,
- temperaturna površina,
- Mach-ov broj vanjske struje vazduha,
- temperaturna vanjska struja vazduha i
- turbulencija vanjske struje vazduha.

I u idealnim uslovima za laminarno opstrujavanje površine, granični sloj će preći u turbulentni kad je Reynolds-ov broj za dužinu opstrujavanja c veći od:

$$\text{Re} = \frac{V_\infty \cdot c}{\mu/\rho} \approx 5 \cdot 10^5 \quad (2.150)$$

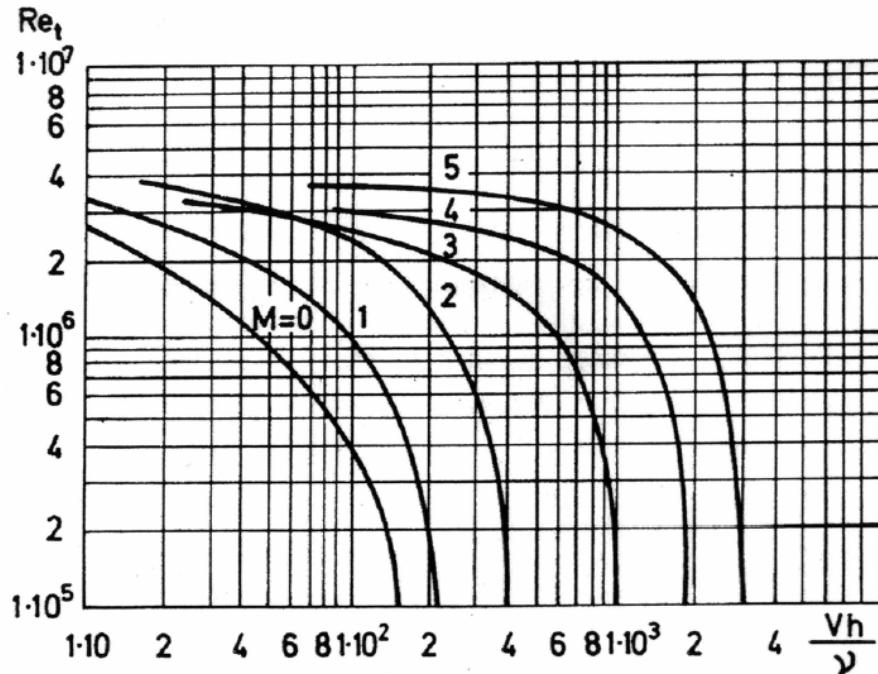
Granični sloj će se mijenjati iz laminarnog u turbulentni kroz slijedeće oblike:

- stabilan linearni granični sloj,
- nestabilan laminarni granični sloj u kome se uočavaju dvodimenzionalni TS talasi,
- područje trodimenzionalnih nestabilnih talasa i razvitak U vrtloga
- područje u kome se mjestimice pojavljuju lokalni izvori turbulencije,
- fluktuacije trodimenzionalnog strujanja zbog isprekidanih vrtloga,
- formiranje turbulentnog strujanja
- konačno turbulentno strujanje

Teorija stabilnosti strujanja predviđa, a eksperiment potvrđuje, da je početna nestabilnost u obliku TS talasa koji se prostiru u pravcu glavne struje. Iako je glavno strujanje dvodimenzionalno pojavljuju se trodimenzionalni TS talasi promjenljivog raspona. Pojava trodimenzionalnog strujanja manifestira se mjestimičnim podebljanjem graničnog sloja, a zatim se dalje pojavljuju fluktuacije na raznim mjestima i u različitim trenucima. Iz tih mesta kreće lokalna turbulencija koja raste i zahvata cijeli granični sloj.

U praksi se usvaja da je prelazak laminarnog u turbulentni sloj trenutan na određenom mjestu kojem se pridružuje Reynolds-ov broj tranzicije:

$$\text{Re}_t = \frac{V_\infty \cdot x_t}{\mu_\infty/\rho_\infty} \quad (2.151)$$



Slika 2.24: Zavisnost Re_t o hrapavosti na ravnoj površini normalne temperature za razne Mahove brojeva vanjske brzine opstrujavanja [11]

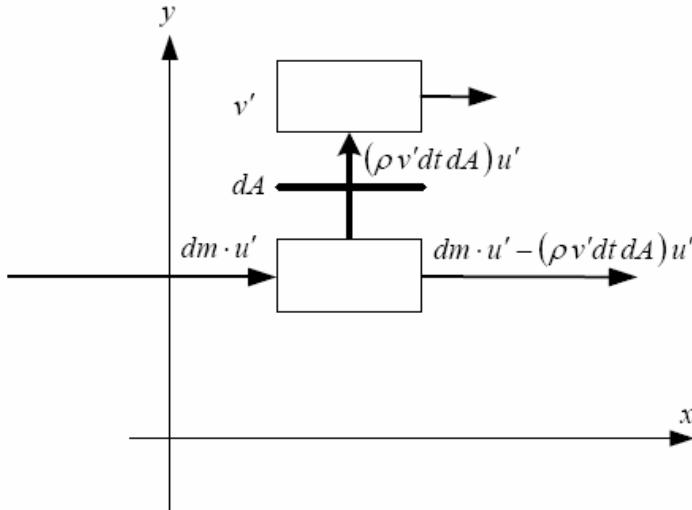
2.2.5 Nestišljivi turbulentni granični sloj

U turbulentnom strujanju posmatramo srednje vrijednosti (označene s crtom iznad vrijednosti) i fluktuacione vrijednosti (označene s oznakom prim). Srednje vrijednosti zadovoljavaju jednačine [44]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} &= \rho u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \bar{u}' \bar{v}' \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Srednje turbulentno kretanje ima sličnu zakonitost kao laminarno, s tim što pored tangencijalnog napona uslijed gradijenta srednje vrijednosti, imamo i jedan dodatni član.

Posmatrajmo jednu elementarnu površinu dA paralelnu x osi.



Slika 2.25: Elementarna površina paralelna x osi

U intervalu dt kroz površinu dA prođe zbog fluktuacije količina mase:

$$\rho \cdot dA \cdot v' \cdot dt$$

Količina kretanja te mase u pravcu x ose je:

$$\rho \cdot dA \cdot v' \cdot dt \cdot u'$$

To znači da je prosječna vrijednost količine kretanja u pravcu x ose koja prođe u jedinici vremena kroz površinu dA :

$$\rho \cdot \overline{u'v'} \cdot dA$$

Ta količina kretanja je izgubljena na površini dA pa je ona negativna. Kao i svaka promjena količine kretanja (u jedinici vremena) tako i ova predstavlja neku silu koja djeluje na toj površini dA u pravcu x (pravac u kome je količine kretanja). Kad tu silu podijelimo s tom površinom dobivamo napon u pravcu x a koji leži na površini dA čija je normalna u pravcu y . Zato je trebalo tangencijalni napon uslijed promjene gradijenta srednje vrijednosti nadopuniti članom $-\rho \cdot \overline{u'v'}$.

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \overline{u'v'} \quad (2.153)$$

Član $-\rho \cdot \overline{u'v'}$ predstavlja turbulentni napon, pa je:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} = \rho u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2.154)$$

Dolazi se do zaključka da je moguće primjenjivati Euler-ovu jednačinu kretanja u pravcu turbulentnog graničnog sloja na srednje vrijednosti korištenjem turbulentog napona. Sigurno je da u neposrednoj blizini zida komponenta brzine v teži k nuli zbog rubnog uslova, a to znači da su i srednja brzina v i fluktaciona brzina v' u okolini zida jednake nuli. Odatle zaključak da ovaj dio tangencijalnog napona u blizini zida ne postoji, međutim dalje od zida Reynolds-ov napon je dominantan.

2.2.6 Integralna jednačina turbulentnog graničnog sloja

Polazimo od jednačina [44]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} &= \rho u_e \frac{du_e}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Integracijom druge jednačine kroz granični sloj, a to znači integraciju po y od površine tijela do vanjskog ruba graničnog sloja, dobivamo:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} dy + \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (2.156)$$

Drugi integral na lijevoj strani može se parcijalnom integracijom transformisati u oblik:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} dy = |\bar{u} \bar{v}|_0^\delta - \int_0^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{u} dy \quad (2.157)$$

Na površini ploče je $\bar{u} = 0$ i $\bar{v} = 0$, a na vanjskom rubu je:

$$\bar{v} = \int_0^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy \quad (2.158)$$

pa je drugi integral na lijevoj strani:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} dy = u_e \int_0^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy - \int_0^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{u} dy \quad (2.159)$$

Iz druge jednačine za nestišljiv granični sloj

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2.160)$$

pa je drugi član na lijevoj strani prve jednačine:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} dy = -u_e \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{u} dy \quad (2.161)$$

Sada je:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} dy - u_e \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{u} dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (2.162)$$

Parcijalne derivacije po x osi ne možemo izvući ispred integrala po y osi, jer je gornja granica $\delta(x)$ ovisna o x odstojanju. U takvim slučajevima koristimo identitet

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx = \frac{d}{d\lambda} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) dx - f(b, \lambda) \frac{db}{d\lambda} + f(a, \lambda) \frac{da}{d\lambda} \quad (2.163)$$

što u ovom slučaju daje:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} dy &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u}^2 dy - u_e^2 \frac{d\delta}{dx} \\ \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u} dy - u_e \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \quad (2.164)$$

S obzirom da je:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = -\tau_0 \quad (2.165)$$

integralna jednačina turbulentnog graničnog sloja može se napisati u obliku:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u}^2 dy - u_e \frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u} dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (2.166)$$

što predstavlja *Karman-ovu integralnu jednačinu* za nestišljiv granični sloj.

U slučaju konstantnog pritiska (ili vanjske brzine) nema prvog člana na desnoj strani jednačine, pa možemo ovu jednačinu staviti u pogodniji bezdimenzionalni oblik dijeljenjem sa u_e^2 . Prvo, podijelimo integralnu jednačinu sa referetnim pritiskom, koji je u ovom slučaju $\frac{\rho u_e^2}{2}$:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{\bar{u}}{u_e} \right)^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{u_e} dy = -\frac{\bar{\tau}_0}{2} \quad (2.167)$$

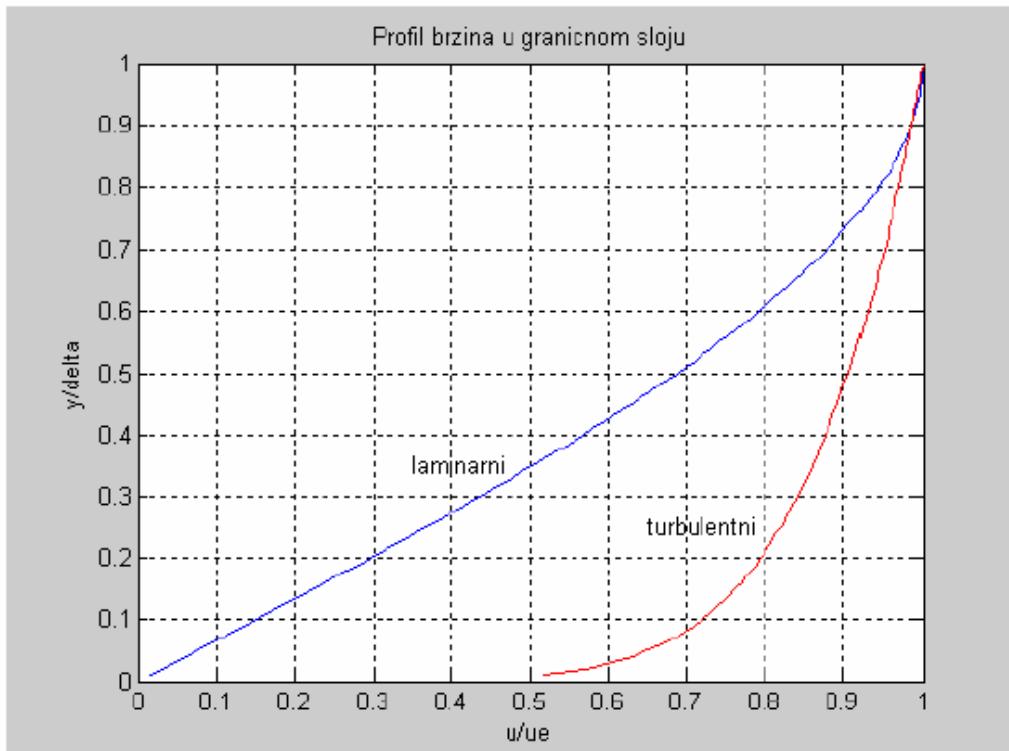
zatim uvedimo i druge bezdimenzionalne veličine $\bar{x} = \frac{x}{l}$; $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$; $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$; vodeći računa da je debljina graničnog sloja $\delta(x)$ funkcija samo ordinate x , a da profil brzina ovisi samo o koordinati y .

Tako dobivamo:

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{\bar{u}}{u_e} \right)^2 d\bar{y} - \int_0^1 \frac{\bar{u}}{u_e} d\bar{y} \right) \cdot \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} = -\frac{\bar{\tau}_0}{2} \quad (2.168)$$

Eksperimentalno je ustanovljeno da u turbulentnom graničnom sloju možemo s velikom tačnošću usvojiti *zakon jedne sedmine* [11]:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \bar{y}^{\frac{1}{7}} \quad (2.169)$$



Slika 2.26: Profil brzina u laminarnom i turbulentnom graničnom sloju [44]

U slučaju turbulentnog graničnog sloja nemamo jednostavnu vezu između tangencijalnog napona i promjene brzine, kao što je bio Newton-ov zakon za laminarni granični sloj.

Eksperimentalna ispitivanja u cjevovodima dala su zavisnost napona na zidu cijevi ovisno o poluprečniku cijevi koji je jednak debljinu graničnog sloja ($r = \delta$) [11]:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{0.045}{\sqrt[4]{\frac{u_e \delta}{\mu_l / \rho}}} \quad (2.170)$$

Uvedimo Reynolds-ov broj za dužinu opstrujavanja $Re = \frac{u_e l}{\mu_l / \rho}$ i bezdimenzionalnu debljinu

graničnog sloja $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$, pa je:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{0.045}{\sqrt[4]{Re \cdot \bar{\delta}}} \quad (2.171)$$

Zamjenom je u Karman-ovu integralnu jednačinu (2.166), uz zakon jedne sedmine (2.169), biće:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \bar{y}^{\frac{2}{7}} d\bar{y} - \int_0^1 \bar{y}^{\frac{1}{7}} d\bar{y} \right) \cdot \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} = - \frac{0.045}{2 \cdot \sqrt[4]{Re \cdot \bar{\delta}}} \\ & \left(-\frac{7}{72} \right) \cdot \sqrt[4]{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} = - \frac{0.045}{2 \cdot \sqrt[4]{Re}} \end{aligned} \quad (2.172)$$

Uz početne uslove $\bar{x} = 0$; $\bar{\delta} = 0$, integracijom, za debljinu turbulentnog graničnog sloja dobije se:

$$\bar{\delta} = 0.37 \frac{\bar{x}^{0.8}}{\sqrt[5]{Re}} \quad (2.173)$$

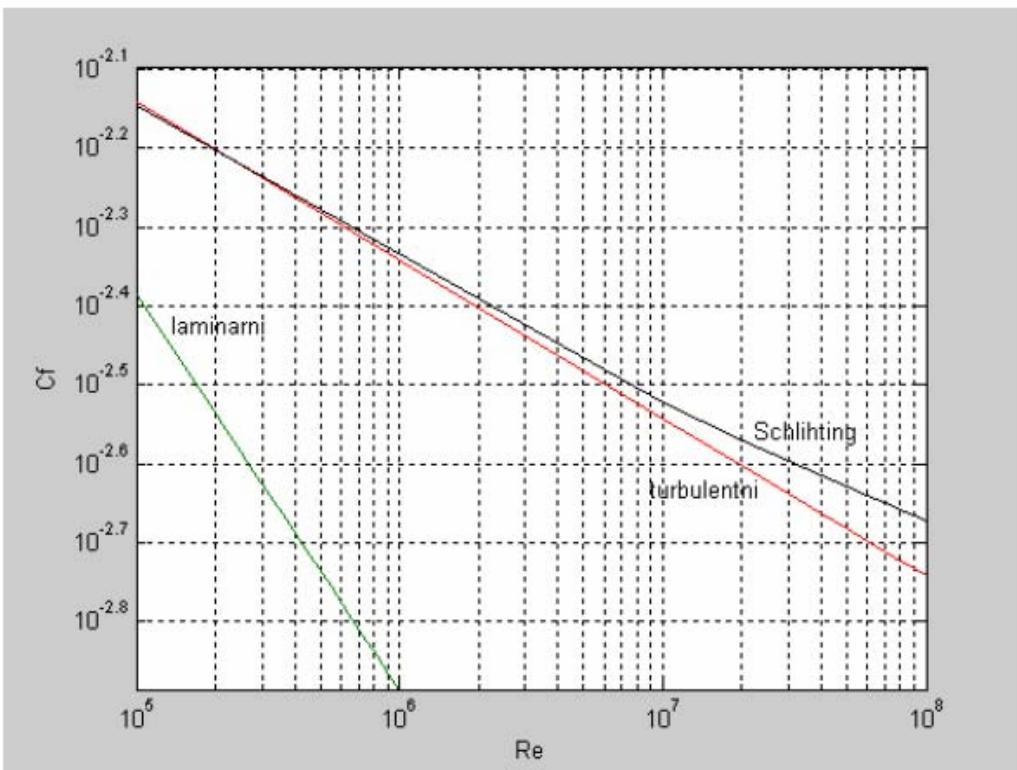
Zamjenom ove jednačine (2.173) u eksperimentalnu jednačinu za tangencijalni napon (2.164) biće:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{0.045}{\sqrt[4]{Re \cdot \delta}} = \frac{0.045}{\sqrt[4]{Re \cdot 0.37} \frac{\bar{x}^{0.8}}{Re^{0.2}}} = \frac{0.058}{Re^{0.2} \bar{x}^{0.2}} = \frac{0.058}{\sqrt[5]{Re \cdot \bar{x}}} \quad (2.174)$$

S ovim tangencijalnim naponom na opstrujavanoj površini koeficijent trenja je:

$$C_f = \int_0^1 \bar{\tau}_0 d\bar{x} = \frac{0.058}{\sqrt[5]{Re}} \int_0^1 \bar{x}^{-0.2} d\bar{x} = \frac{0.072}{\sqrt[5]{Re}} \quad (2.175)$$

Zavisnost koeficijenta trenja od Reynolds-ovog broja najpogodnije je prikazati u logaritamskoj podjeli, jer ona tu postaje pravac.



Slika 2.27: Zavisnost koeficijenta trenja od Reynolds-ovog broja [44]

Ova jednačina za koeficijent trenja ne daje zadovoljavajuće vrijednosti kad je $Re > 10^5$, pa se zato u praksi preporučuje Schlichting-ova formula:

$$C_f = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58}} \quad (2.176)$$

Debljina istiskivanja je ona debljina graničnog sloja u kojoj bi bio isti gubitak količine kretanja kao kada bi vazduh bio u potpunosti zaustavljen.

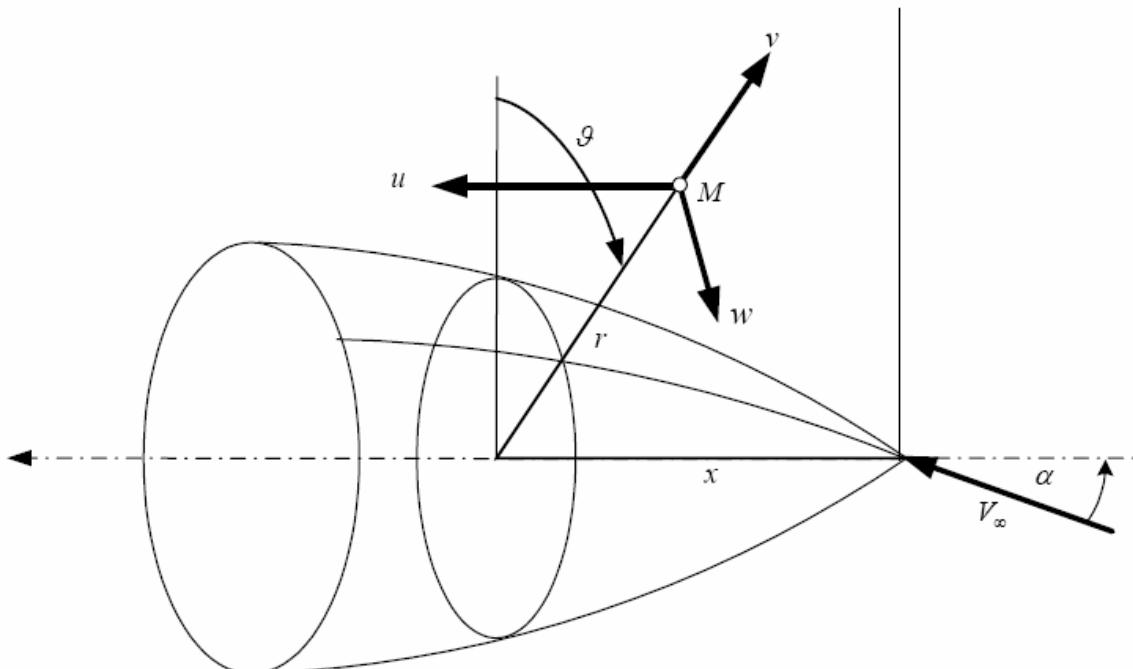
Debljina istiskivanja za turbulentni granični sloj će biti:

$$\delta^* = \int_0^e \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e} \right) dy = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{\frac{1}{7}} \right) d\bar{y} = \frac{1}{8} \cdot \delta \quad (2.177)$$

3. Cilj i objekt istraživanja

Cilj rada je da se na osnovu dostupnih eksperimentalnih podataka i teoretskih metoda izvrši poboljšanje postojećih metoda predviđanja aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile, (sile otpora pri nultom napadnom uglu) u sklopu softvera „BODY“ u subsoničnom, transoničnom i supersoničnom području, radi povećanja tačnosti datog koeficijenta.

Da bi definisali sile koje djeluju na osnosimetrični projektil dok se kreće kroz vazduh, posmatrajmo rotaciono tijelo u struji vazduha [11, 39]. Usvajamo cilindrične koordinate, pri čemu se ishodište nalazi u vrhu tijela, a x osa je osa simetrije tijela. Ravan koju čine osa tijela x i neporemećena brzina V_∞ naziva se ravan opstrujavanja. Za rotaciono tijelo sve ravni kroz osu simetrije su iste. Ravan opstrujavanja čini ugao ϑ s koordinatnom ravninom xz (slika 3.1).



Slika 3.1: Rotaciono tijelo

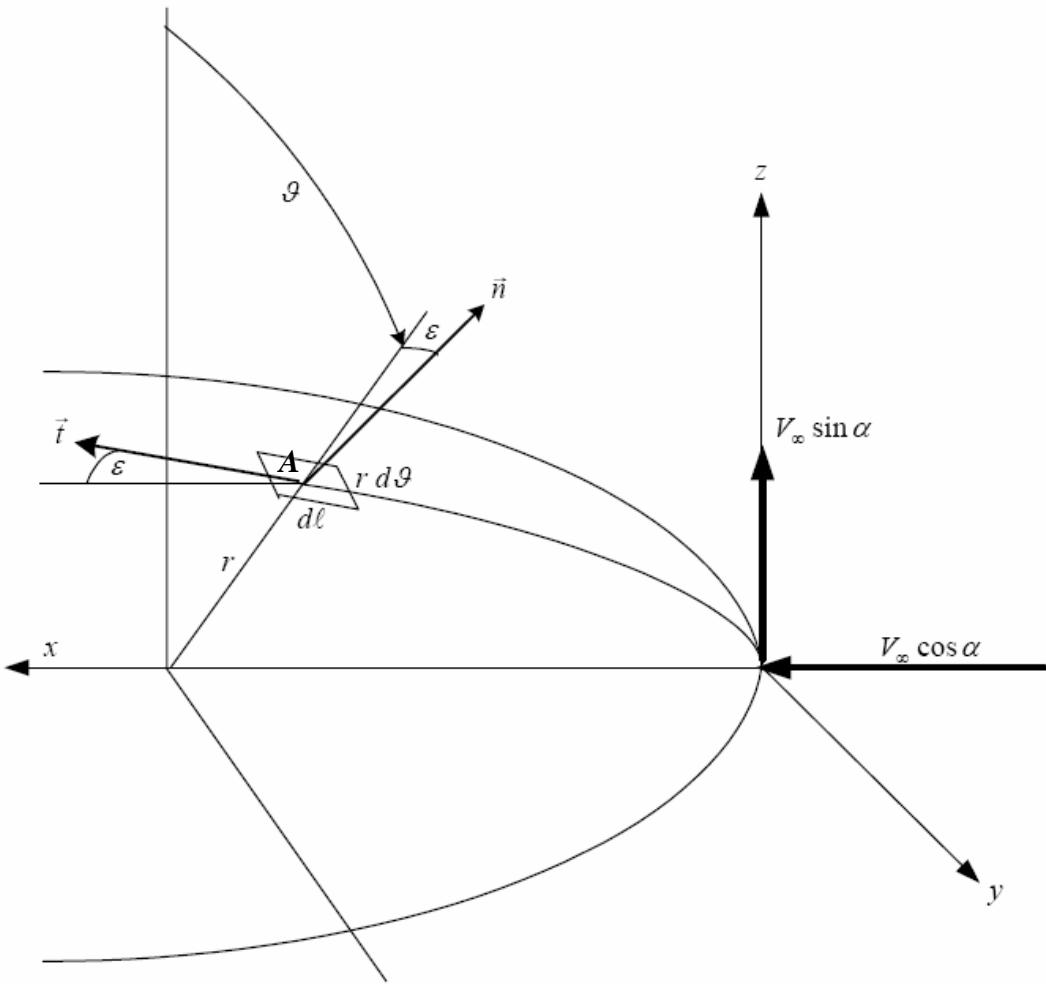
Cjelokupnu vanjsku površinu rotacionog tijela dijelimo na dva dijela:

- dio P , bočni dio ili *omotač (plašt)* na kojem imamo granični sloj, i
- dio S_b , *bazni dio* iza kojeg se formira trag projektila.

Posmatrajmo element površine dP na plaštu, u tački A (slika 3.2). Na taj element površine dP djeluje vanjski pritisak p i tangencijalni napon τ_0 . Vanjski pritisak se prenosi kroz granični sloj te daje okomitu silu $-pdP \cdot \vec{n}$. Tangencijalni napon τ_0 daje elementarnu silu trenja $\tau_0 dP$ u tangencijalnoj ravnini u pravcu lokalne brzine. U opštem slučaju ta tangencijalna sila ima dvije komponente: jednu u presjeku s ravni kroz osu x , a drugu u presjeku s ravni okomitoj na osu x . Ukoliko tijelo ne rotira oko svoje ose ovu drugu zanemarujemo. U tom slučaju taj tangencijalni napon daje silu $\tau_0 dP \cdot \vec{t}$.

To znači da na element bočne površine tijela, dP , djeluju elementarne sile:

$$\tau_0 \vec{t} dP \quad i \quad p \vec{n} dP$$



Slika 3.2: Element bočne površine tijela

Na zadnjem dijelu projektila gdje započinje trag djeluje pritisak p_b . Taj pritisak stvara silu koja djeluje na površinu S_b , a po pravcu je okomita na površinu dna.

To znači da na cijelu vanjsku površinu rotacionog tijela djeluje sila:

$$\vec{F} = \int_P (\tau_0 \vec{t} - p \vec{n}) dP - p_b S_b \vec{n}_b \quad (3.1)$$

Kad rotaciono tijelo miruje u prostoru onda na omotač P i na dno S_b djeluje vanjski neporemećeni pritisak p_∞ . Ukupna sila jednaka je nuli pa imamo jednačinu:

$$0 = \int_P -p_\infty \vec{n} dP - p_\infty S_b \vec{n}_b \quad (3.2)$$

Oduzimanjem ove jednačine od sile F koja djeluje na vanjsku površinu rotacionog tijela, daje:

$$\vec{F} = \int_P \tau_0 \vec{t} dP - \int_P (p - p_\infty) \vec{n} dP - (p_b - p_\infty) S_b \vec{n}_b \quad (3.3)$$

Cjelokupna aerodinamička sila, \vec{F} , koja djeluje na rotaciono tijelo ima tri komponente (aksijalnu, bočnu i normalnu) duž koordinatnih osa koje možemo definisati izrazima:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_x \\ F_y &= \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_y \\ F_z &= \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

Projektovanjem vektorske jednačine za aerodinamičku silu na koordinatne ose dobivamo tri skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_x &= \int_P \tau_0 t_x dP - \int_P (p - p_\infty) \cdot n_x dP - (p_b - p_\infty) S_b \\ \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_y &= \int_P \tau_0 t_y dP - \int_P (p - p_\infty) \cdot n_y dP \\ \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref} C_z &= \int_P \tau_0 t_z dP - \int_P (p - p_\infty) \cdot n_z dP \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dijeljenjem s referentnom silom

$$\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{ref}$$

i uvođenjem bezdimenzionalnog tangencijalnog napona

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}} \quad (3.6)$$

dobivamo opšte jednačine za aerodinamičke koeficijente rotacionog tijela:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{1}{S_{ref}} \int_P \bar{\tau}_0 t_x dP - \frac{1}{S_{ref}} \int_P C_p n_x dP - \frac{p_b - p_\infty}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}} \frac{S_b}{S_{ref}} \\ C_y &= \frac{1}{S_{ref}} \int_P \bar{\tau}_0 t_y dP - \frac{1}{S_{ref}} \int_P C_p n_y dP \\ C_z &= \frac{1}{S_{ref}} \int_P \bar{\tau}_0 t_z dP - \frac{1}{S_{ref}} \int_P C_p n_z dP \end{aligned} \quad (3.7)$$

U slučaju osnosimetričnih projektila je $p_b < p_\infty$, tj.

$$C_{pb} = \frac{p_b - p_\infty}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}} < 0 \quad (3.8)$$

pa se izraz za aerodinamički koeficijent aksijalne sile može napisati u obliku:

$$C_x = \underbrace{\frac{1}{S_{ref}} \int_P \bar{\tau}_0 t_x dP}_{C_{xf}} + \underbrace{\frac{1}{S_{ref}} \int_P C_p (-n_x) dP}_{C_{xp}} + \underbrace{\left(-C_{pb} \frac{S_b}{S_{ref}} \right)}_{C_{xb}} \quad (3.9)$$

Ova jednačina pokazuje da postoje tri dijela aksijalnog koeficijenta C_x : otpor trenja C_{xf} , otpor pritiska (talasni otpor) C_{xp} i otpor dna C_{xb} .

Za rotaciono tijelo $dP = r \cdot d\theta \cdot dl$, gdje je dl element izvodnice rotacionog tijela, pa je $dl \cdot \cos \varepsilon = dx$ i $dl \cdot \sin \varepsilon = dr$. S tim veličinama je

$$\begin{aligned} t_x dP &= \cos \varepsilon \cdot r \cdot d\theta \cdot dl = r \cdot d\theta \cdot dx \\ n_x dP &= -\sin \varepsilon \cdot r \cdot d\theta \cdot dl = -r \cdot d\theta \cdot dr \end{aligned} \quad (3.10)$$

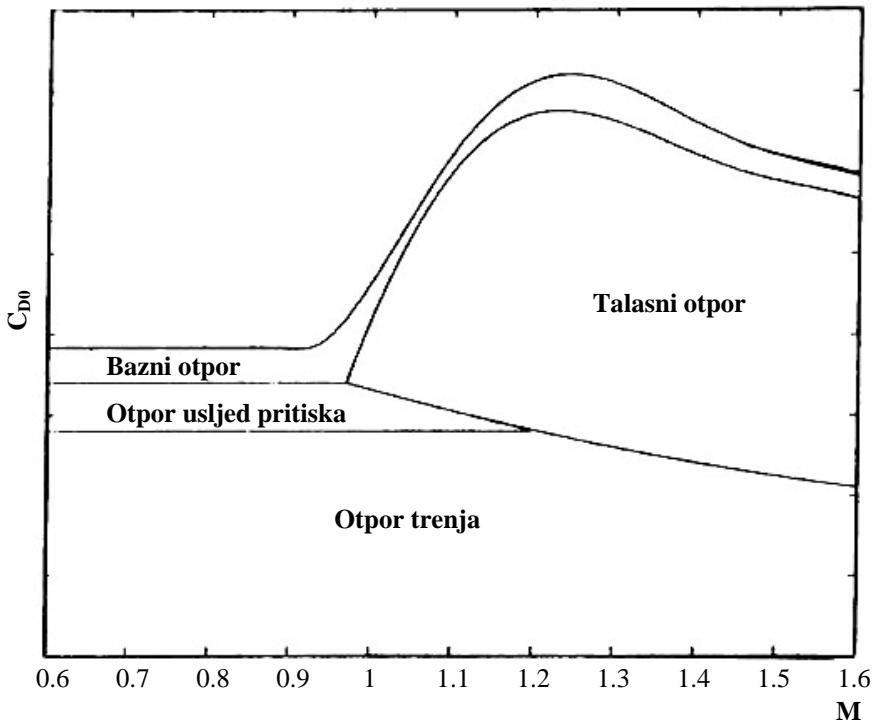
odnosno

$$\begin{aligned} C_{xf} &= \frac{1}{S_{ref}} \int_P \bar{\tau}_0 \cdot r \cdot d\theta \cdot dx \\ C_{xp} &= \frac{1}{S_{ref}} \int_P C_p \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tangencijalni napon i koeficijent pritiska ne ovise od ugla θ , pa su jednačine za komponente koeficijenta aksijalne sile:

$$\begin{aligned} C_{xf} &= \frac{2 \cdot \pi}{S_{ref}} \int_0^l \bar{\tau}_0 \cdot r \cdot dx \\ C_{xp} &= \frac{2 \cdot \pi}{S_{ref}} \int_0^{r_{max}} C_p \cdot r \cdot dr \end{aligned} \quad (3.12)$$

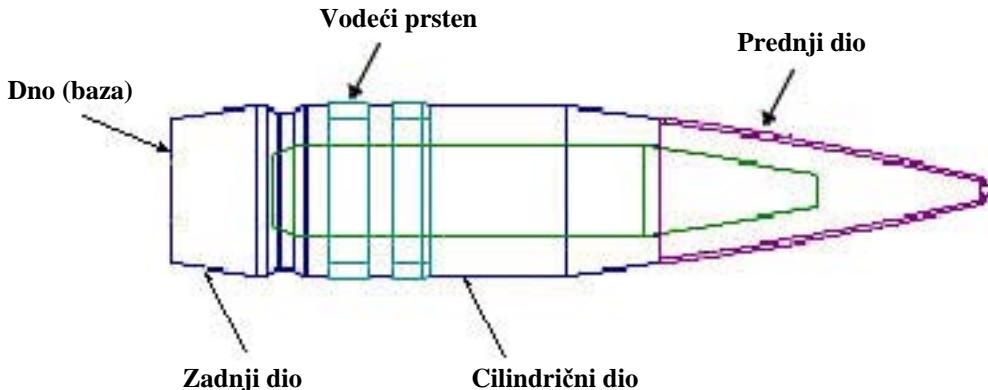
Otpor se može definisati kao dinamička sila fluida koja djeluje na objekat postavljen u struju vazduha. U osnovi, sila otpora se može podijeliti na dvije kategorije, otpor prouzrokovani silama koje djeluju normalno na graničnu površinu koji se naziva otpor pritiska i onaj koji nastaje iz tangencijalnih sila koje djeluju tangencijalno na površinu uslijed viskoznosti a koji se naziva viskozni otpor ili otpor trenja.



Slika 3.3: Udio pojedinih komponenata koeficijentata otpora [47]

Suprotno otporu trenja (koji je tangencijalna sila) otpor pritiska rezultira iz rasporeda sila pritiska normalno na površinu tijela. Unutar subsoničnog područja brzina, teorija dinamike neviskoznog fluida predviđa da će se tok zatvoriti iza tijela, bez ikakvih gubitaka. Pozitivni pritisci na prednjem dijelu projektila su izjednačeni sa negativnim pritiskom istog intenziteta na zadnjem

dijelu, što rezultira da je otpor pritiska nula. Ovaj fenomen je poznat kao D'Alembert-ov paradoks. U stvarnim tokovima, pritisak na zadnjem dijelu objekta može biti mnogo niži nego onaj predviđen iz uslova neviskoznog toka. Viskoznost prouzrokuje formiranje graničnog sloja koji može izazvati odvajanje toka na površini tijela. Rezltirajući diferencijal pritiska između pritiska na prednjem dijelu i nižeg pritiska na zadnjem dijelu predstavlja otpor pritiska.



Slika 3.4: Komponente osnosimetričnog projektila

Osnosimetrični projektili se, u pravilu, sastoje od prednjeg dijela, cilindričnog dijela, zadnjeg konusnog (konvergentnog ili divergentnog) dijela i vodećeg prstena. Koeficijent otpora se dobija linearom superpozicijom koeficijenata talasnog otpora (otpora pritiska), otpora trenja i otpora dna

$$C_{D0} = C_{D_H} + C_{D_{BT}} + C_{D_B} + C_{D_{RB}} + C_{D_{SF}}$$

gdje su:

C_{D0} - koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu

C_{D_H} - koeficijent otpora pritiska prednjeg dijela

$C_{D_{BT}}$ - koeficijent otpora pritiska zadnjeg dijela

C_{D_B} - koeficijent baznog otpora

$C_{D_{RB}}$ - koeficijent otpora pritiska vodećeg prstena

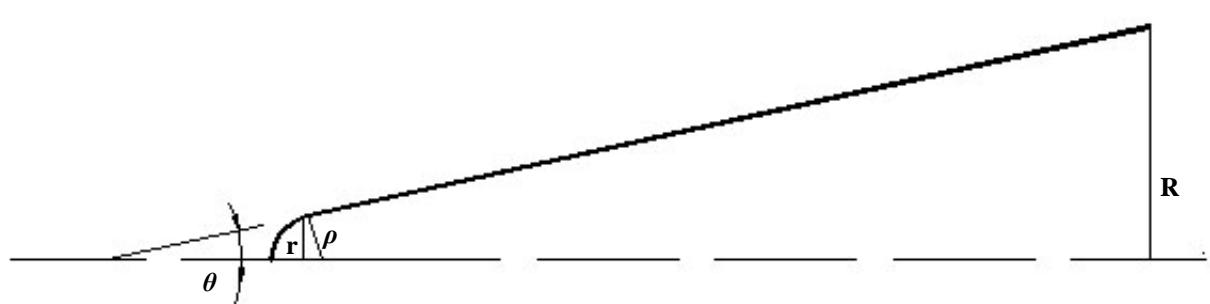
$C_{D_{SF}}$ - koeficijent otpora trenja

Ponašanje svih navedenih komponenata otpora jako zavisi od Mach-ovog broja slobodnog toka, a otpor trenja i bazni otpor zavise i od Reynolds-ovog broja.

3.1 Otpor prednjeg dijela uslijed pritiska

Prednji dio projektila je najčešće složen od dva ili više oblika. Vrh projektila može biti šiljat, zaobljen ili zarubljen.

Razmotriti će se prednji dio oblika zaobljenog konusa, dakle kombinacija konusa i sfere.



Slika 3.5: Složeni prednji dio – zaobljeni konus

Ako integral kojim je definisana aksijalna sila prednjeg dijela:

$$C_{x1} = \frac{2 \cdot \pi}{S} \int_0^R \bar{p} \cdot r \cdot dr \quad (3.13)$$

gdje je:

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (3.14)$$

rastavimo na dva dijela, dio koji se odnosi na sferu i dio koji se odnosi na konus, imamo:

$$C_{x1} = \frac{2}{R^2} \int_0^r \bar{p} \cdot r \cdot dr + \frac{2}{R^2} \int_r^R \bar{p} \cdot r \cdot dr \quad (3.15)$$

Uz prepostavku da je na konusnom dijelu pritisak ostao isti iako je vrh zaobljen (rezultat je tačniji što je odnos r/R manji) biće:

$$C_{x1} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{2}{r^2} \int_0^r \bar{p} \cdot r \cdot dr + \frac{2}{R^2} \bar{p} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

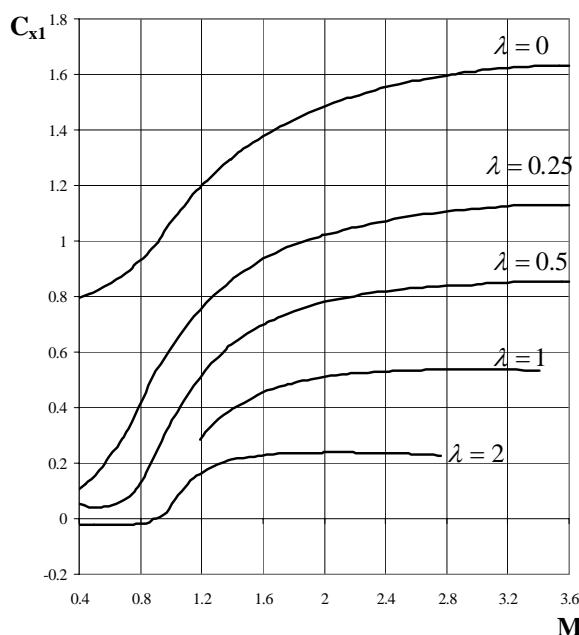
S obzirom da je za sferu aerodinamčki koeficijent aksijalne sile:

$$C_{x1sf} = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho \bar{p} \cdot r \cdot dr \quad (3.17)$$

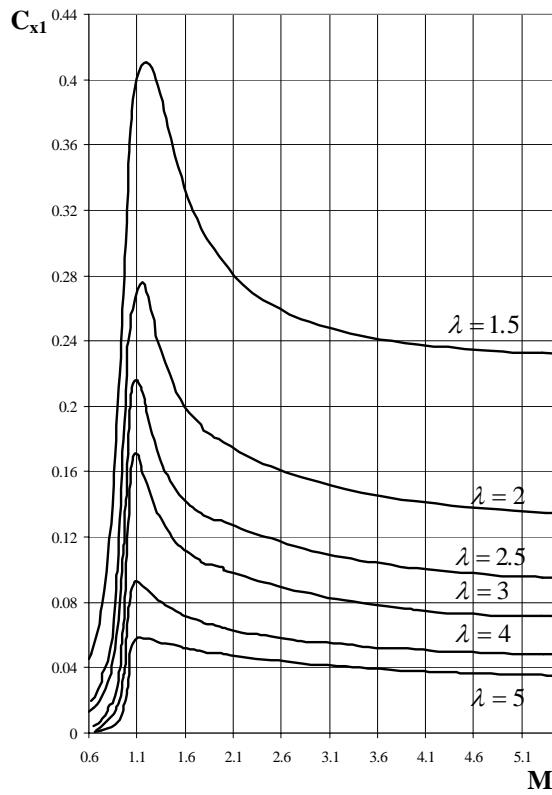
biće:

$$C_{x1} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 C_{x1sf} + C_{x1k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za prednji dio oblika sfere dat je u funkciji vitkosti λ i Mach-ovog broja na dijagramu 3.6, za $\lambda = 0.5$, a za špicasti konus u zavisnosti od vitkosti λ i Mach-ovog broja na dijagramu 3.7. Vitkost λ se definiše kao odnos dužine i prečnika.

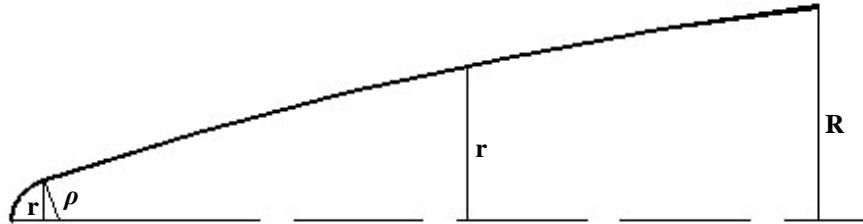


Slika 3.6: Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za razne eliptičke oblike prednjeg dijela [1]



Slika 3.7: Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za prednji dio oblika konusa [1]

U praksi vrlo čest slučaj je parabolni prednji dio sa zaobljenjem na vrhu (slika 3.8).



Slika 3.8: Složeni prednji dio – zaobljeni parabolni prednji dio

I u ovom slučaju rastavljamo integral koji daje aerodinamički koeficijent aksijalne sile prednjeg dijela na dva integrala:

$$C_{x1} = \frac{2}{R^2} \int_0^r \bar{p} \cdot r \cdot dr + \frac{2}{R^2} \int_r^R \bar{p} \cdot r \cdot dr$$

gdje se prvi dio odnosi na sferu, a drugi parabolni prednji dio.

Za raspodjelu pritiska po parabolnom prednjem dijelu važi empirijska formula [1]:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 \left(1 - 0.69 \frac{r}{R} - 0.44 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (3.19)$$

Ako prepostavimo da je ta raspodjela pritiska ista i poslije zaobljenja, onda je:

$$\begin{aligned} \frac{2}{R^2} \int_r^R \bar{p} \cdot r \cdot dr &= 2 \cdot \bar{p}_0 \int_{\frac{r}{R}}^1 \left(1 - 0.69 \frac{r}{R} - 0.44 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{r}{R} \cdot d \left(\frac{r}{R} \right) = \\ &= 2 \cdot \bar{p}_0 \left[0.16 - \left(0.5 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 0.23 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^3 - 0.11 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Međutim, prije zaobljenja za parabolni prednji dio bilo je:

$$C_{x1p} = 2 \cdot \bar{p}_0 \int_0^R \left(1 - 0.69 \frac{r}{R} - 0.44 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{r}{R} \cdot d\left(\frac{r}{R} \right) = 2 \cdot \bar{p}_0 \cdot 0.16 \quad (3.21)$$

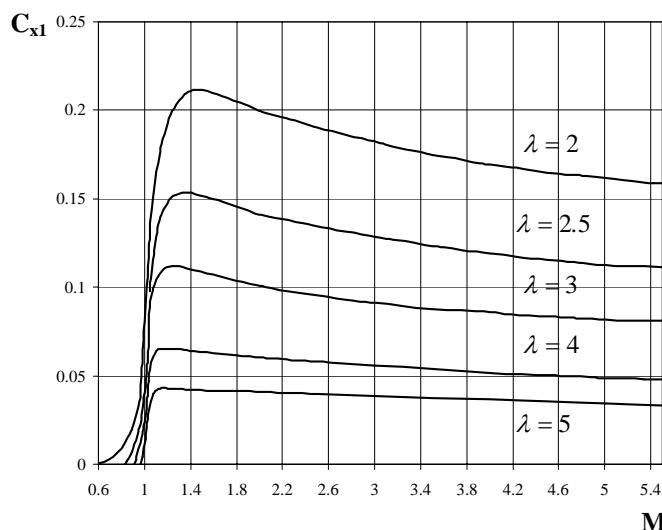
tako da dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{R^2} \int_r^R \bar{p} \cdot r \cdot dr &= \frac{C_{x1p}}{0.16} \left[0.16 - \left(0.5 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 0.23 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^3 - 0.11 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right] = \\ &= C_{x1p} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \left(3.1 - 1.4 \cdot \left(\frac{r}{R} \right) - 0.7 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

pa je za datu kombinaciju aerodinamički koeficijent aksijalne sile:

$$C_{x1} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot C_{x1sf} + C_{x1p} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \left(3.1 - 1.4 \cdot \left(\frac{r}{R} \right) - 0.7 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right] \quad (3.23)$$

Na slici 3.9 data je zavisnost aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile parabolnog prednjeg dijela od Mach-ovog broja i vitkosti prednjeg dijela.



Slika 3.9: Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za parabolni prednji dio [1]

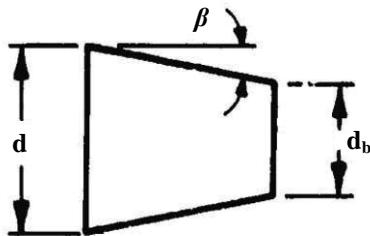
Aerodinamički koeficijenti aksijalne sile prednjeg dijela oblika oživila, konusa i parabolnog prednjeg dijela se razlikuju među sobom. U transoničnom i supersoničnom režimu najmanji otpor ima oblik oživila. U subsoničnom režimu približava mu se parabolni prednji dio koji za manje brzine ima manji otpor od oživila. Među oživilima iste vitkosti postoje razlike zavisno od toga da li je tangentan (kraj oživila tangira cilindrični dio) ili sekantan. Pri istoj vitkosti, prednji dio oblika konusa ima veći koeficijent aksijalne sile od prednjeg dijela parabolnog oblika za sve Mach-ove brojeve. Sa stanovišta otpora najpovoljniji oblik prednjeg dijela je sekantni ožival, jer on daje najniže vrijednosti koeficijenta aksijalne sile.

U modelu BODY prednji dio projektila se smatra složenim, pri čemu ta složenost podrazumijeva samo zaobljenje ili zarubljenje vrha projektila. Upaljač se ne posmatra zasebno, već se prednji dio smatra homogenim.

3.2 Otpor zadnjeg dijela uslijed pritiska

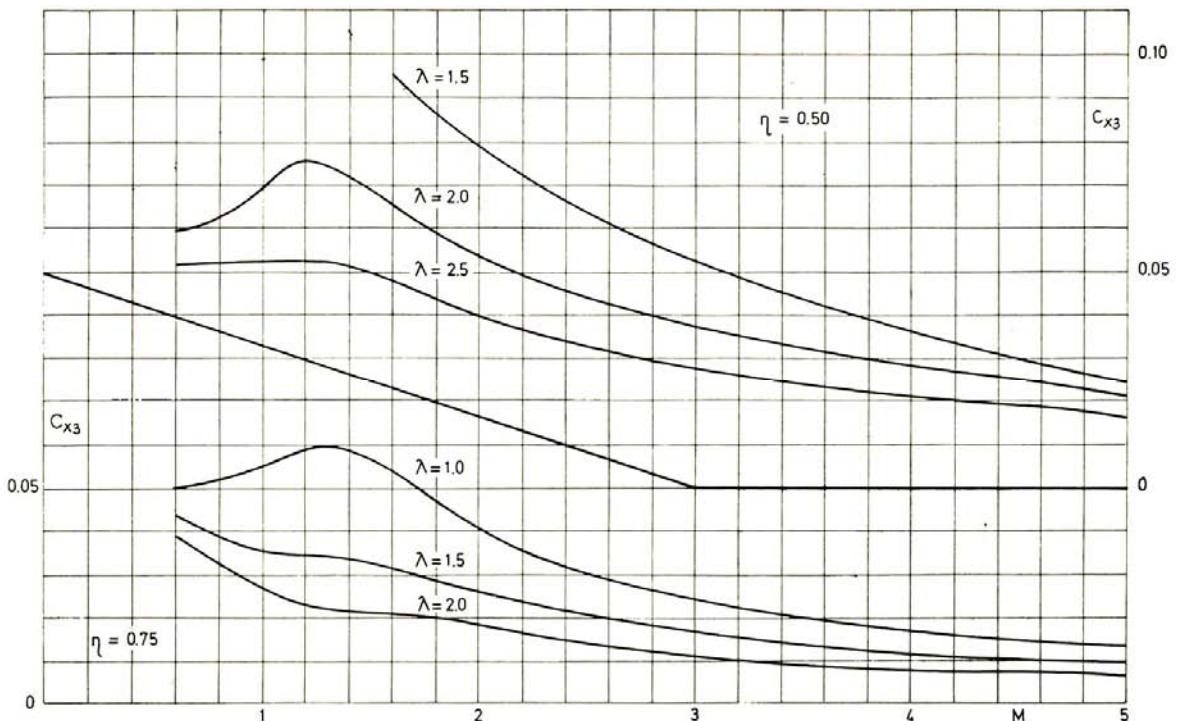
Ako projektil ima zadnji dio u obliku zarubljenog konusa, ukupna aksijalna sila ovog dijela projektila će biti manja zbog smanjenja površine na koju djeluje potpritisak, izmjene karaktera strujanja, pomjeranja tačke odvajanja graničnog sloja i smanjenja intenziteta vrtloženja.

Osnovna pretpostavka pri razmatranju uticaja zadnjeg konusa na ukupnu aksijalnu silu je da je struja koja nailazi na zadnji dio neporemećena, tj. da je opstrujavanje cilindričnog dijela završeno sa bezdimenzionalnim pritiskom jednakim nuli i brzinom jednakoj neporemećenoj brzini.



Slika 3.10: Zadnji dio projektila oblika zarubljenog konusa

Na slici 3.11 date su vrijednosti aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile zadnjeg dijela oblika zarubljenog konusa u funkciji: Mach-ovog broja, vitkosti zadnjeg dijela i odnosa prečnika baze i kalibra projektila (η), koje su dobivene eksperimentalno [11].



Slika 3.11: Aerodinamički koeficijent aksijalne sile za konusni zadnji dio [11]

Za Mach-ove brojeve veće od 1.5 može se upotrijebiti i empirijska formula [1]:

$$C_{x_{BT}} = \left(0.083 + \frac{0.096}{M^2} \right) \cdot \left(\frac{\beta}{10} \right)^{1.7} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d_b}{d} \right)^2} \quad (3.24)$$

pri čemu ugao konusa β treba izraziti u stepenima.

3.3 Otpor trenja

Otpor trenja nastaje kao posljedica viskoznosti fluida, pod kojom podrazumijevamo sposobnost fluida da se suprostavlja klizanju jednog sloja u odnosu na drugi. Karakteristika viskoznosti je dinamički viskozitet μ , koji se definiše kao koeficijent proporcionalnosti između napona trenja dF/dS i gradijenta brzine.

Pri kretanju tijela kroz vazduh ili kretanju vazduha duž tijela, čestice vazduha u neposrednom dodiru sa tijelom imaju njegovu brzinu, a sa udaljavanjem od površine tijela brzina raste, da bi se postigla brzina slobodne struje na određenom rastojanju od površine tijela.

Sloj vazduha, u opštem slučaju fluida, uz samu površinu tijela projektila naziva se granični sloj, čija je debljina reda desetih dijelova milimetra. Debljina raste od vrha ka dnu projektila. U graničnom sloju strujnice mogu da budu paralelne, i sloj se naziva laminarni granični sloj. Na određenom rastojanju od vrha projektila granični sloj prelazi u turbulentni, kada strujnice počinju da se miješaju i da se stvaraju vrtlozi.

Osnovna veličina od koje zavise karakter i veličina graničnog sloja je Reynolds-ov broj:

$$Re = \frac{Vl}{\nu} \quad (3.25)$$

gdje su:

- V - brzina projektila
- l - dužina opstrujavanja
- ν - kinematska viskoznost

Koeficijent otpora trenja, $C_{D_{SF}}$, je proporcionalan ukupnoj površini omotača projektila bez površine dna (izraženoj u kalibrima²), S_W , i koeficijentu trenja za glatku ravnu ploču, C_F , [16]:

$$C_{D_{SF}} = \frac{4}{\pi} C_F S_W \quad (3.26)$$

Za laminarni granični sloj, Blasius-ova formula [16], sa korekcijom za uticaj kompresibilnosti je:

$$C_{F_l} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} (1 + 0.12M^2)^{-0.12} \quad (3.27)$$

a za turbulentni granični sloj, Prandtl-ova empirijska formula [16], sa korekcijom za uticaj kompresibilnosti je:

$$C_{F_t} = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_t)^{2.58}} (1 + 0.21M^2)^{-0.32} \quad (3.28)$$

3.4 Otpor dna

Subsonično opstrujavanje iza projektila stvara produženi granični sloj u obliku cilindrične površine, turbulentnog karaktera, čija se debljina rapidno povećava. U unutrašnjosti te površine nalazi se vazduh koji neposredno uz dno relativno miruje, a uz granični sloj se kreće s njim. Ova razlika u brzinama prouzrokuje neposredno iza dna potpritisak p_d koji opada sa udaljavanjem od dna. Taj potpritisak dovodi do konvergencije opstrujavanja, čime se u okolini ose na maloj udaljenosti od dna projektila stvara zona natpritiska. Iz te zone vazduh struji ka zoni potpritiska.

Iz navedenog je očito da je potpritisak iza dna u vezi sa debljinom graničnog sloja. S druge strane, iz teorije graničnog sloja je poznato da tangencijalni napon zavisi obrnuto proporcionalno od debljine graničnog sloja. Na osnovu ispitivanja vršenih da se odredi zavisnost između prosječnog tangencijalnog napona τ_m na površini P i potpritiska p_d utvrđena je empirijska zavisnost [11]:

$$\bar{p}_d = -\frac{0.029}{\sqrt{\frac{\tau_m}{q_\infty} \frac{P}{S_b}}} \quad (3.29)$$

Kako je:

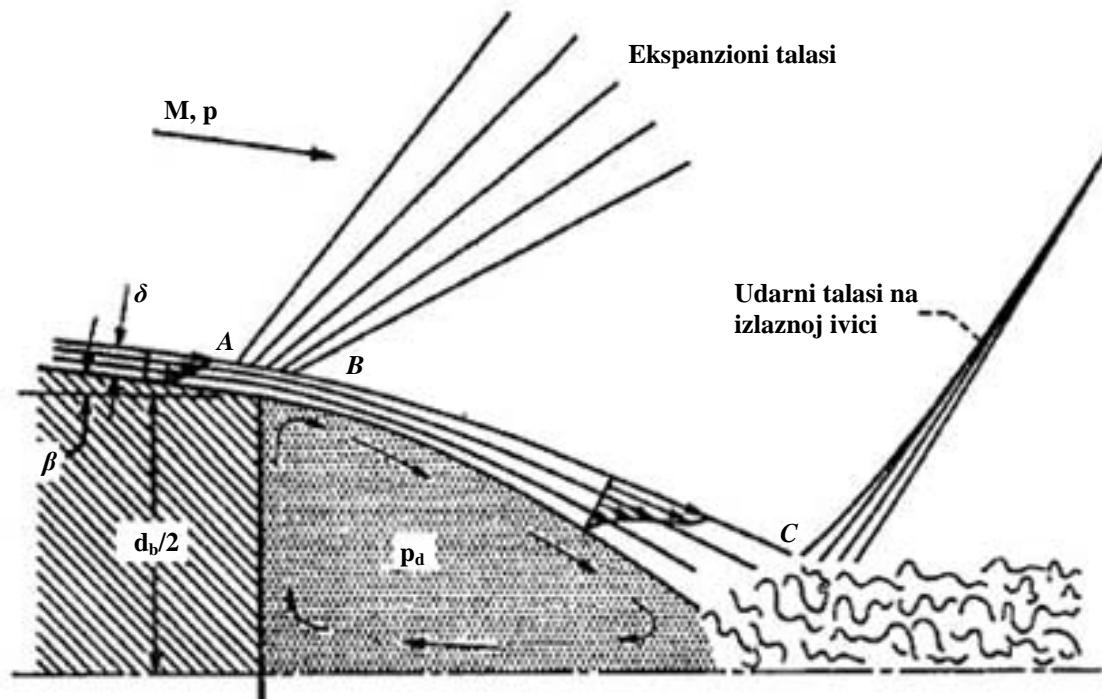
$$\tau_m = \frac{q_\infty S C_{xf}}{P} \quad (3.30)$$

i

$$C_{xd} = -\bar{p}_d \frac{S_b}{S} \quad (3.31)$$

biće

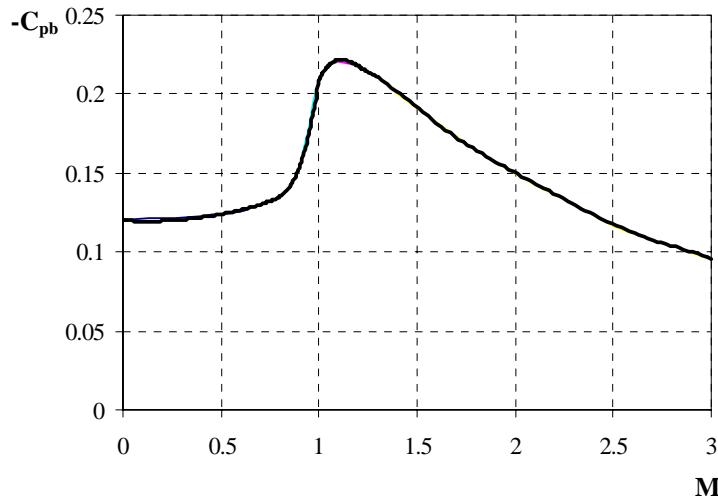
$$C_{xd} = \frac{0.029}{\sqrt{C_{xf}}} \left(\frac{S_b}{S} \right)^{1.5} \quad (3.32)$$



Slika 3.12: Shema supersoničnog opstrujavanja dna projektila [30]

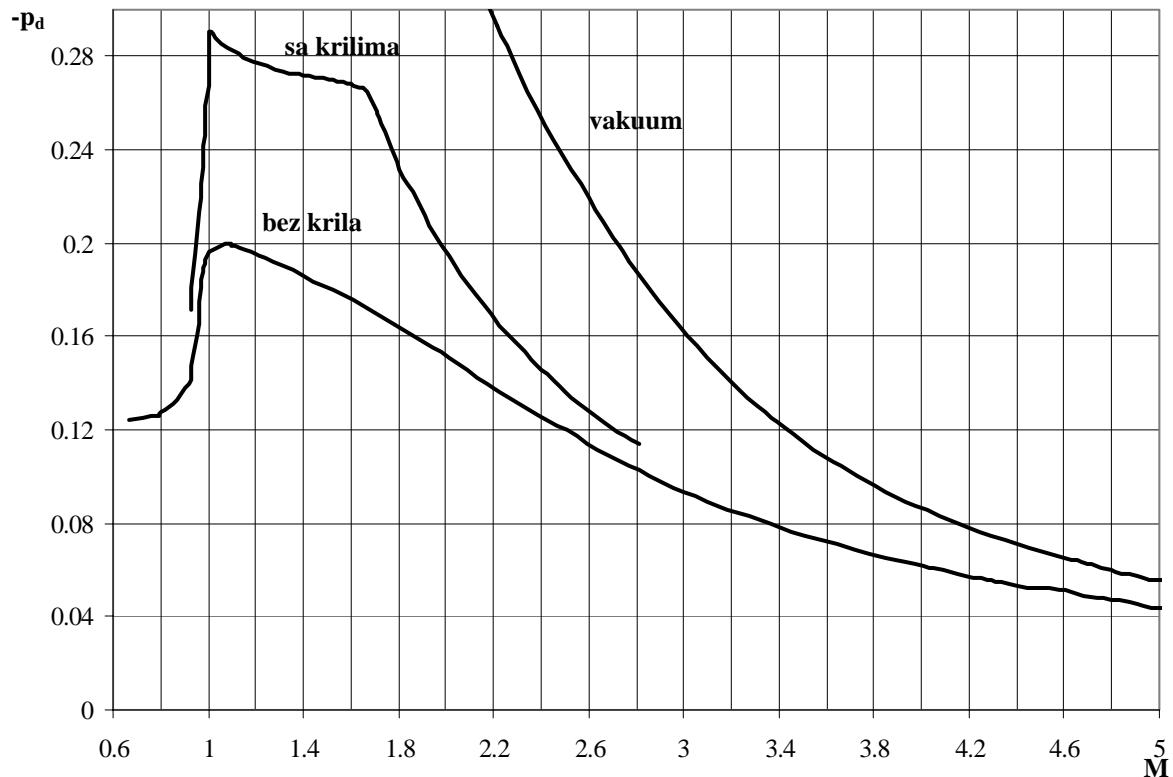
Pri supersoničnom opstrujavanju, takođe, se stvara potpritisak iza dna projektila koji dovodi do savijanja strujnica prema osi. U blizini ose strujnice se moraju opet saviti da bi bile paralelne osi, što je praćeno pojmom udarnih talasa koji su osnovna karakteristika strujanja iza projektila pri supersoničnom opstrujavanju. Udarni talas je praćen vrtložnim tragom. Na mjestu gdje se sruđuju strujnice povijenog produžetka graničnog sloja nastaje zona povišenog pritiska iz koje struji vazduh u pravcu dna projektila, popunjavajući vakuum na dnu. I u supersoničnom opstrujavanju povijeni produžetak graničnog sloja povlači vazduh sa dna projektila tako da se

stvara kružno kretanje vazduha. Zavisnost koeficijenta pritiska na dnu (bazi) projektila od Mach-ovog broja, za $Re > 6 \cdot 10^6$, prikazana je na slici 3.13 [20].



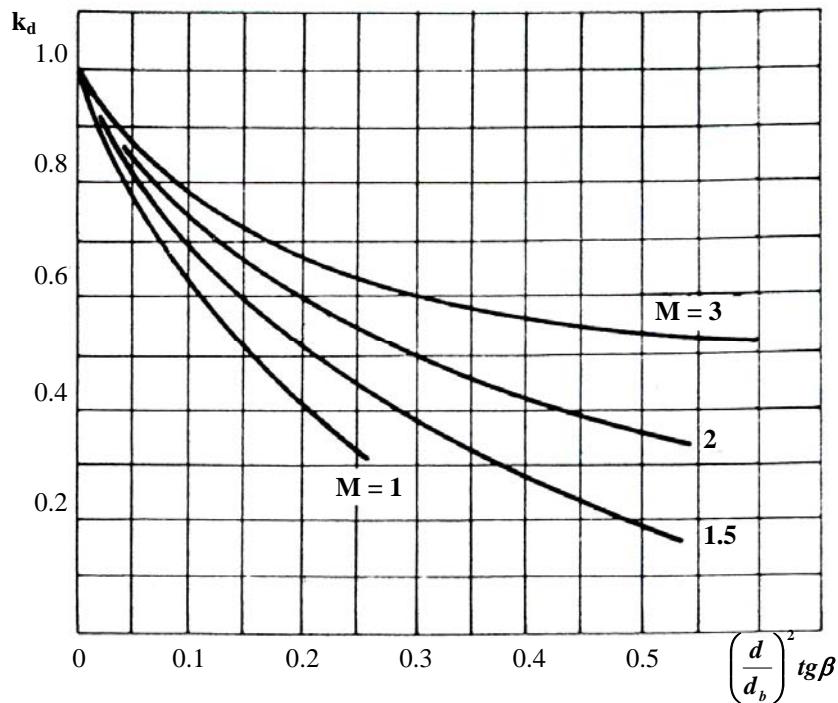
Slika 3.13: Zavisnost koeficijenta srednjeg baznog pritiska od Mach-ovog broja [20]

Proračun koeficijenta otpora dna u modelu BODY izvršen je na osnovu dijagrama iz literature [1] – zavisnost koeficijenta pritiska na dno projektila od Mach-ovog broja, prikazanog na slici 3.14,



Slika 3.14: Koeficijent pritiska na dno projektila [1]

a uticaj oblika zadnjeg konusa se uzima preko popravnog koeficijenta k_d za $M > 1$, prikazanog na slici 3.15,



Slika 3.15: Popravni koeficijent k_d u funkciji parametra zadnjeg konusa i Mach-ovog broja [11]

pomoću izraza [11]:

$$C_{xd} = -p_d \left(\frac{d_b}{d} \right)^2 \cdot k_d \quad (3.33)$$

4. Metode istraživanja

Postoji mnogo metoda za proračun koeficijenta otpora projektila C_D , ali sve one su zasnovane na primjeni jedne od tri opšte metode:

- Eksperimentalna (vazdušni tunel ili poligon)
- Teoretska (pojednostavljeni proračuni)
- Numerička (CFD)

Eksperimentalnim metodama aerodinamički koeficijenti se određuju u vazdušnom (aero) tunelu ili na temelju mjerjenja kretanja projektila u letu (kao materijalne tačke ili krutog tijela).

Za testiranje u tunelu, obično, se pravi skaliran model koji ima vanjsku konfiguraciju kao projektil u preliminarnom dizajnu. Unutrašnjost modela je šuplja i sadrži pogodnu opremu za montiranje modela na oslonac. Uz poznate vrijednosti gustine vazduha ρ , referentne površine S i brzine opstrujavanja V , mjeri se sila koja djeluje na uređaj koji drži model projektila. Ovo je, vjerojatno, metoda koja daje najrealnije vrijednosti za koeficijent otpora, međutim nedostaci eksperimentata u tunelu su:

- visoka cijena
- problemi skaliranja ako model nije u prirodnoj veličini
- smetnje od zidova tunela
- teškoće mjerjenja

Za testove na poligonu, projektil se proizvodi u skladu sa crtežima preliminarnog dizajna. Projektil se ispaljuje tako da ima približno ravnu putanju u prikladno instrumentovanoj građevini. Brojni parametri kretanja projektila (brzina, ugaona brzina, napadni ugao, orijentacija napadnog ugla i skretanje) se pažljivo mijere od strane više stanica duž putanje. Iz podataka položaj-vrijeme (brzina) može se izvesti zaključak o padu brzine. Uz poznavanje mase i prečnika projektila, kao i trenutnih vrijednosti barometarskog pritiska, temperature i vlažnosti moguće je izračunati otpor i koeficijent otpora. Ponovljenim gađanjem sa istom brzinom dobivaju se promjene koeficijenta otpora sa napadnim uglom, a skup ispaljivanja sa različitim početnim brzinama daje promjene koeficijenta otpora sa Mach-ovim brojem.

Balistički poligon	Vazdušni tunel
Dobra kontrola Mach-ovog broja, brzine, temperature i pritiska	Odlična kontrola Mach-ovog broja, brzine, temperature i pritiska
Slaba kontrola položaja modela u prostoru	Odlična kontrola položaja modela u prostoru
Model mora biti statički ili žiroskopski stabilan	Mogućnost određivanja podataka i za stabilnu i za nestabilnu konfiguraciju
Bez podupirača za remećenje baznog toka	Model izaziva poremećaj baznog toka
Jedan test pokriva više Mach-ovih brojeva	Samo jedan Mach-ov broj po testu
Svođenje podataka je komplikovano	Svođenje podataka je jednostavno
Modeli su obično u prirodnoj veličini	Modeli su obično umanjeni
Reynolds-ov broj se može mijenjati promjenom veličine modela	Reynolds-ov broj se može mijenjati promjenom pritiska u tunelu

Slika 4: Razlike između testova na poligonu i testova u vazdušnom tunelu [21]

Greška aerodinamičkog koeficijenta otpora [22], za $M = 1.5$, određenog testiranjem na poligonu iznosi 0-2%, dok je za tunel greška nešto veća i iznosi 5-10%.

U teoretskim metodama nužne su prepostavke i pojednostavljenja da bi problem bio rješiv. Ovo uključuje pojednostavljenje geometrije i pojednostavljenje jednačina. Jednačine koje su poznate kao Navier-Stokes-ove jednačine, uz jednačinu energije i jednačinu kontinuiteta, opisuju tok fluida oko tijela. One su analitički nerješive u zatvorenom obliku, ali se mogu pojednostaviti za specifičnu geometriju ili uslove leta.

Numeričke metode su prilično nove, u upotrebi su od dolaska digitalnih kompjutera za vrijeme Drugog svjetskog rata. Napredni CFD kodovi numerički rješavaju Navier-Stokes-ove jednačine i mogu pokazati kompletno polje toka oko objekta za specifične uslove leta. Najčešća verzija uključuje CFD kodove koji rješavaju Euler-ove jednačine, ali su oni upotrebljivi samo za područje oko jednog Mach-a.

Prednosti ove metode su što nema pojednostavljenja geometrije projektila i moguće je prikazati vremenski razvoj toka. Kod ovih metoda problemi se javljaju pri određivanju graničnih uslova, jer početni uslovi moraju biti definisani sa velikom tačnošću.

Postoji nekoliko "kombinovanih" metoda. One uključuju kompilacije empirijskih podataka i podataka iz tunela kombinovanih sa kompjuterskim modelima teorijskih jednačina.

Od Drugog svjetskog rata raste potreba za bržim i tačnijim metodama za proračun aerodinamičkih karakteristika aviona, raketa i artiljerijskih projektila. Ovo se ostvaruje sistematskom kompilacijom dostupnih podataka, proračuna baziranih na teoretskim rješenjima fluidnog toka i rezultata eksperimenata. Razvojem računara započinje era programskih rješenja u ovom području, tako da u ranim sedamdesetim godinama prošlog vijeka nastaju programi: AP72, SPIN-73, MCDRAG, itd., koji predstavljaju osnovu današnjih programa iz oblasti aerodinamike za predviđanje sila i momenata koji djeluju na projektil.

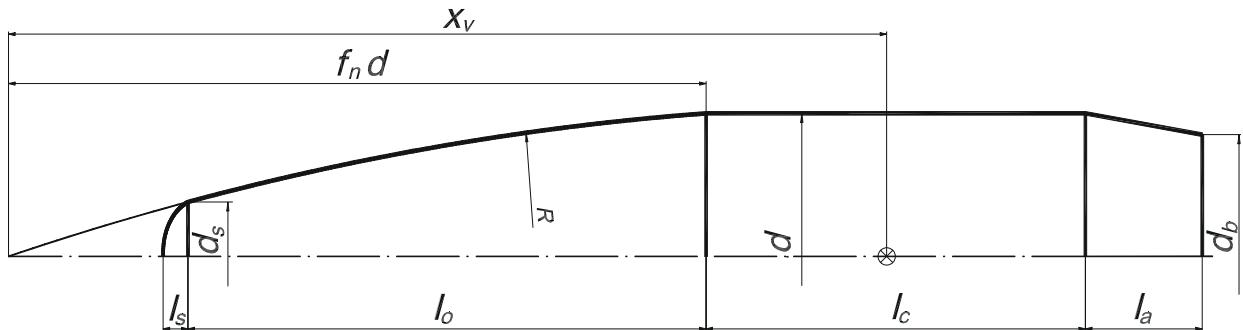
Zbog nemogućnosti vršenja eksperimenata, mjerjenja na poligonu i u aerotunelu, istraživanje obuhvata analizu teoretskih metoda (poglavlje "Dosadašnja istraživanja") i postojećih dostupnih modela iz aerodinamike u oblasti koja se odnosi na proračun koeficijenta aksijalne sile. U svrhu poboljšanja postojećih metoda korištenih u modelu BODY, analizirani su modul za predviđanje koeficijenta aksijalne sile u modelu BODY i modeli MCDRAG i AP72 i izvršena komparacija vrijednosti koeficijenta otpora i njegovih komponenata predviđenih modelima BODY i MCDRAG.

4.1 Model BODY

Krajem osamdesetih godina prošlog vijeka, prof. dr. Slobodan Janković [10] je razvio model ADB (aerodynamic derivatives of the body of revolution) za određivanje aerodinamičkih karakteristika projektila rotacionog oblika na osnovu geometrije, koji je tokom narednih deset godina pretrpio neke manje izmjene i prerastao u model BODY. Te izmjene su izvršene u dijelovima programa koji se odnose na proračun površine omotača projektila, na proračun koeficijenta otpora dna pri subsoničnom i transoničnom opstrujavanju i na proračun koeficijenta otpora prednjeg dijela.

U modelu BODY, predstavljenom fortranskim programom, koji služi za određivanje aerodinamičkih koeficijenata osnosimetričnog projektila, ulazne veličine su geometrijske karakteristike projektila (oznake su originalne):

- d_s – prečnik zaobljenja, odnosno zatupljenja na vrhu projektila
- l_s – dužina zaobljenja na vrhu projektila
- f_n – vitkost prednjeg oživila
- l_o – dužina prednjeg oživila
- K – recipročna vrijednost radijusa prednjeg oživila
- d_p – prečnik fiktivnog cilindra koji tangira ožival
- d_c – kalibar projektila
- l_c – dužina cilindričnog dijela
- d_b – prečnik dna (baze) projektila
- l_a – dužina zadnjeg dijela projektila



Slika 4.1: Ulazni podaci za program BODY [10]

Program ima jednu ulaznu datoteku, CONFIG.DAT, u koju se upisuju geometrijske karakteristike projektila (sve dimenzije moraju biti izražene u metrima), i dvije izlazne datoteke, AERO.TAB, u kojoj su pregledno ispisane vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata za date Mach-ove brojeve, i DERIV.DAT, koja služi kao ulazna datoteka za program za određivanje trajektorije projektila 6DOF.

Ulagana datoteka CONFIG.DAT ima 7 redova i u njoj sve dužinske veličine trebaju biti izražene u metrima:

- U prvom redu se upisuju prečnik zaobljenja (zatupljenja) d_s i dužina zaobljenja l_s na vrhu projektila. Ako je vrh projektila zatupljen (zasječen) onda je dužina zaobljenja jednaka nuli.
- U drugom redu su vitkost prednjeg oživila f_n , dužina prednjeg oživila l_o , recipročna vrijednost radijusa prednjeg oživila K i prečnik fiktivnog cilindra koji tangira ožival d_p . Posljednja vrijednost nosi informaciju o kakovom se prednjem dijelu radi: sekantnom ili tangentnom. Ako je prednji dio tangentan onda prečnik fiktivnog cilindra koji tangira ožival mora biti jednak kalibru projektila.
- U trećem redu se upisuje kalibar projektila d_c i dužina cilindričnog dijela
- U četvrtom redu su prečnik baze projektila d_b i dužina zadnjeg dijela (konusa) projektila l_a . Ako nema zadnjeg dijela onda je prečnik baze jednak kalibru, a l_a bilo koja vrijednost manja od dužine cilindričnog dijela, mada obično uzimamo da je nula.
- U petom redu se upisuje udaljenost od fiktivnog vrha projektila do tačke za koju se računaju gradijenti koeficijenata momenata, x_v .
- U šestom redu je broj n_M , broj koji označava za koliko se Mach-ovih brojeva se vrši proračun
- U posljednjem, sedmom, redu se upisuju Mach-ovi brojevi za koje se radi proračun

Projektil je, dakle, podijeljen: na prednji dio, cilindrični dio, zadnji dio i dno (bazu), dok je vodeći prsten zanemaren. Proračun obuhvata opseg Mach-ovih brojeva za subsoniku, transoniku i supersoniku.

Koeficijent aksijalne sile je:

$$C_{A0} = C_{Anose} + C_{Aafterbody} + C_{Afriction} + C_{Abase} \quad (4.1)$$

Smatra se da je prednji dio složenog oblika, tj. uzima se u obzir oblik vrha projektila koji može biti šiljat, zatupljen ili zaobljen. Upaljač se ne posmatra zasebno, već kao dio oživala ili konusa, zavisno od oblika prednjeg dijela projektila

Za proračun koeficijenta otpora prednjeg dijela korišteni su dijagrami iz literature [1] koji daju vrijednosti koeficijenta otpora za različite oblike prednjeg dijela (konus – sl.3.7, tangentni parabolni prednji dio – sl.3.9 i razni eliptički oblici – sl.3.6) u funkciji vitkosti prednjeg dijela i Mach-ovog broja, a dobiveni su računskim putem metodom karakteristika i dopunjeni eksperimentalnim podacima. Krive sa dijagrama su aproksimirane polinomima višeg reda. U aerodinamičkoj biblioteci se nalaze podprogrami koji služe za proračun koeficijenata otpora špicastih prednjih dijelova: FCAC koji računa vrijednosti za konusni prednji dio i FCAO koji računa vrijednosti za parabolni prednji dio kojim se aproksimira tangentni ožival. Koeficijent otpora za sekantni ožival sa datim radijusom se dobije interpolacijom između vrijednosti za tangentni ožival iste vitkosti i konus. Proračuna zatupljenja, odnosno zaobljenja se računa u podprogramu FCAE.

Dobivene vrijednosti se unose u izraz za koeficijent otpora složenog prednjeg dijela:

$$C_{Ap} = C_{Ae} \left(\frac{d_s}{d} \right)^2 + C_{Apogive} \left(1 - \left(\frac{d_s}{d} \right)^2 \left(3.1 - 1.4 \frac{d_s}{d} - 0.7 \left(\frac{d_s}{d} \right)^2 \right) \right) \quad (4.2)$$

gdje je C_{Ae} koeficijent aksijalne sile eliptičnog prednjeg dijela dat u aerobiblioteci pomoću podprograma FCAE, za $0.4 \leq M \leq 3.6$ i vitkost manju od 2, a $C_{Apogive}$ koeficijent aksijalne sile prednjeg dijela oblika špicastog tangentnog oživila, za $0.6 \leq M \leq 5$ i vitkost od 2 do 5, takođe dat u aerobiblioteci podprogramom FCAO.

Krivina tangentnog oživila, K_T , koji ima istu vitkost kao ožival za koji se traži otpor je:

$$K_T = \frac{1}{(f_n^2 + 0.25) \cdot d}$$

pri čemu je $K_T = \frac{1}{R_T}$, a R_T radijus tangentnog oživila.

Koeficijent otpora sekantnog oživila računa se prema izrazu:

$$C_{Aps} = C_{ApC} + (C_{ApT} - C_{ApC}) R_T / R \quad (4.3)$$

gdje je C_{ApC} koeficijent aksijalne sile prednjeg dijela oblika šiljatog konusa, u aerobiblioteci podprogram FCAC koji daje vrijednost koeficijenta aksijalne sile uslijed raspodjele pritiska na konusnom prednjem dijelu za $0.6 \leq M \leq 5$ i vitkost konusa od 1.5 do 5.

Na cilindričnom dijelu se pretpostavlja da nema talasnog otpora.

Pri proračunu otpora zadnjeg dijela polazi se od pretpostavke da je struja koja nailazi na zadnji dio neporemećena a da je zadnji dio oblika konusa. Za određivanje ove komponente aksijalne sile korišten je dijagram iz literature [1] koji daje koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja, vitkosti zadnjeg dijela i odnosa prečnika dna i kalibra projektila (sl.3.11). Dijagram je aproksimiran polinomima koji se nalaze u podprogramu FCAA.

Za Mach-ove brojeve manje od 1, koeficijent otpora dna se računa preko empirijske formule Kurzweg-a, koja uzima u obzir koeficijent trenja:

$$C_{Ab} = \frac{0.029}{\sqrt{C_{Af} + C_{Ap}}} (d_b/d)^3 \quad (4.4)$$

gdje je

$$C_{Ap} = C_{Af} (60/f_B^3 + 0.0025 * f_B) P/S \quad (4.5)$$

pri čemu je P je bočna površina (površina omotača projektila), a S je referentna površina projektila $\pi \cdot d^2/4$.

Proračun koeficijenta otpora dna, za $M \geq 1$, vrši se na osnovu dijagrama iz literature [1] – zavisnost koeficijenta pritiska na dnu projektila od Mach-ovog broja (sl.3.14), a uticaj oblika zadnjeg konusa se uzima preko popravnog koeficijenta k_d , (sl.3.15):

$$C_{Ab} = -c_{pb}(M)k_d S_b / S \quad (4.6)$$

Dijagram koeficijenta pritiska na dnu je aproksimiran polinomima koji se nalaze u podprogramu FCPB, funkcija $c_{pb}(M)$, a dijagram koji daje vrijednosti popravnog koeficijenta u zavisnosti od

parametra zadnjeg konusa $\left(\frac{d}{d_b}\right)^2 \operatorname{tg}\beta$ i Mach-ovog broja, funkcija $k_d \left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{(d_b/d)^2}\right)$ izražen je

preko podprograma FKB.

Koeficijent otpora trenja se računa, u glavnom programu, pomoću Schlichting-ove formule za otpor trenja ravne ploče $c_{Afiction}$. Pretpostavlja se turbulentno strujanje u graničnom sloju i uzima u obzir uticaj kompresibilnosti:

$$c_{Afiction} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58} \left(1 + \frac{M^2}{15}\right)^{0.85}} \quad (4.7)$$

4.2 Model MCDRAG

Fortranski program MCDRAG [16] razvio je Robert McCoy, 1981 godine, u balističkom istraživačkom laboratoriju u Maryland-u. Rezultati dobiveni ovim programom su validni za Mach-ove brojeve od 0.5 do 5 i kalibar projektila od 4 do 100 mm.

Veza između koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu i Mach-ovog broja se dobiva iz aerodinamičkih pravila sličnosti. Ova veza obuhvata parametre oblika i veličine, kao i dodatne parametre čije se vrijednosti određuju metodom najmanjih kvadrata.

Ulagane veličine su geometrijske karakteristike projektila i kod za vrstu graničnog sloja:

- d_{ref} – referentni prečnik projektila u milimetrima
- l – dužina projektila u kalibrima
- l_o – dužina prednjeg dijela u kalibrima
- R_p/R – odnos radijusa tangentnog oživala i radijusa stvarnog oživala iste vitkosti
- l_{bt} – dužina zadnjeg dijela projektila u kalibrima
- d_b – prečnik dna (baze) projektila u kalibrima
- d_m – prečnik zatupljenja prednjeg dijela u kalibrima
- d_{rb} – prečnik vodećeg prstena u kalibrima
- x_{cg} – položaj tečišta od vrha u kalibrima
- blc – kod za vrstu graničnog sloja

Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu, C_{D0} , predstavlja sumu koeficijenata otpora pojedinih komponenata projektila:

$$C_{D0} = C_{D_H} + C_{D_{BT}} + C_{D_B} + C_{D_{RB}} + C_{D_{SF}}$$

gdje su:

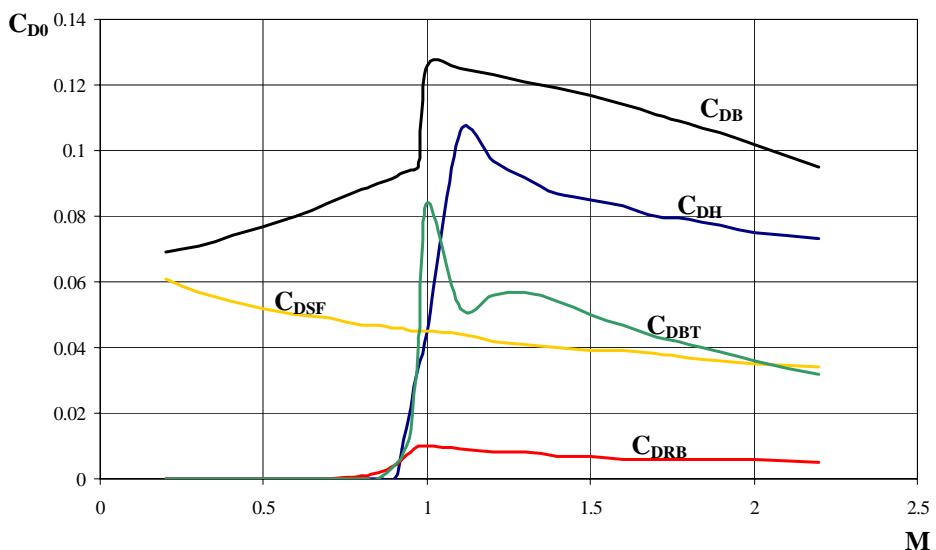
C_{D_H} - koeficijent otpora prednjeg dijela

$C_{D_{BT}}$ - koeficijent otpora zadnjeg dijela

C_{D_B} - koeficijent baznog otpora

$C_{D_{RB}}$ - koeficijent otpora vodećeg prstena

$C_{D_{SF}}$ - koeficijent otpora trenja



Slika 4.2: Udio različitih komponenata otpora [16]

Ponašanje svih navedenih komponenata otpora zavisi od Mach-ovog broja; a otpor trenja i bazni otpor zavise i od Reynolds-ovog broja. U programu je pretpostavljeno da je otpor uslijed pritiska (otpor prednjeg dijela, otpor vodećeg prstena i otpor zadnjeg dijela) u subsoničnom području jednak nuli.

4.2.1 Koeficijent otpora prednjeg dijela

Talasni otpor šiljatog konusnog prednjeg dijela pri supersoničnim brzinama poznat je iz Taylor – Maccoll-ijeve teorije, a koeficijent otpora prednjeg dijela koji ima oblik konusa može se lako dovesti u korelaciju sa Mach-ovim brojem pomoću Gothert-ovog pravila sličnosti:

$$C_{D_H}(M^2 - 1) = f(\tau \sqrt{M^2 - 1}, \tau) \quad (4.8)$$

gdje je:

$$\tau = \frac{1}{L_N}$$

L_N - dužina konusnog prednjeg dijela u kalibrima

Prethodna relacija, takođe, dovodi u korelaciju koeficijent otpora prednjeg dijela s Mach-ovim brojem za šiljati oživalni prednji dio.

Za Mach-ov broj od 1 do 4 i $\tau < 2$ je:

$$C_{D_H} (M^2 - 1) = (C_1 - C_2 \tau^2) [\tau \sqrt{M^2 - 1}]^{(C_3 + C_4 \tau)} \quad (4.9)$$

gdje su:

$$C_1 = 0.7156 - 0.5313(R_T/R) + 0.5950(R_T/R)^2$$

$$C_2 = 0.0796 + 0.0779(R_T/R)$$

$$C_3 = 1.587 + 0.049(R_T/R)$$

$$C_4 = 0.1122 + 0.1658(R_T/R)$$

Odnos (R_T/R) naziva se parametar prednjeg dijela; to je odnos radiusa tangentnog oživila i radiusa aktualnog oživila za istu dužinu prednjeg dijela. Za konus je $(R_T/R) = 0$, za tangentni ožival $(R_T/R) = 1$, a za sekantni ožival ovaj parameter se kreće između 0 i 1.

Standardno odstupanje za C_{D_H} određen na ovaj način je 5%, pri čemu je C_{D_H} približno 40% od ukupnog C_{D_0} za tipične projektile. Korištenje ove jednakosti rezultiraće sa greškom manjom od 2% kod izračunavanja ukupnog koeficijenta otpora pri supersoničnim brzinama.

4.2.2 Koeficijent otpora zadnjeg dijela

Forma zakona sličnosti za otpor zadnjeg dijela pri supersoničnim brzinama dobije se razvojem jednačine malih poremećaja drugog reda u nizove, za male vrijednosti ugla zadnjeg dijela projektila β . Rezultat je:

$$[C_{D_{BT}}] = \frac{4Atg\beta}{k} \left[(1 - e^{-kL_{BT}}) + 2tg\beta \left(e^{-kL_{BT}} \left(L_{BT} + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right) \right] \quad (4.10)$$

gdje je:

- $[C_{D_{BT}}]$ - parametar sličnosti
- β - ugao zadnjeg konusa
- L_{BT} - dužina zadnjeg dijela u kalibrima
- A - promjena u koeficijentu pritiska zadnjeg dijela prema Prandtl-Mayer-ovoј ekspanziji
- k - faktor obnavljanja pritiska zadnjeg dijela

Oblik izraza za A i k u prethodnoj jednačini je, takođe, rezultirao iz teorije drugog reda, ali sadrži nepoznate koeficijente, koji su dobiveni iz podešavanja koeficijenata najmanjih kvadrata zadnjeg dijela, izračunatih metodom karakteristika. Rezultati za izraze za A i k su:

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{-\sqrt{\frac{2L_{CYL}}{\gamma M^2}}} + \frac{2tg\beta}{\sqrt{M^2 - 1}} - \frac{[(\gamma + 1)M^4 - 4(M^2 - 1)]tg^2\beta}{2(M^2 - 1)^2} \\ A_1 &= \left[1 - \frac{3(R_T/R)}{5M} \right] \frac{5\tau}{6\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{0.7435}{M^2} (\tau M)^{1.6} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$k = \frac{0.85}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

pri čemu su:

L_{CYL} - dužina cilindrične sekcije projektila

A_1 - faktor korekcije oblika za koeficijent otpora zadnjeg dijela pri supersoničnim brzinama

Eksperimentalne vrijednosti koeficijenta otpora zadnjeg dijela su dobivene numeričkom integracijom mjerjenih pritisaka raspoređenih duž konusnog zadnjeg dijela.

U literaturi ne postoji parametar sličnosti primjenjiv za zadnji dio pri transoničnim brzinama, pa je u nedostatku toga pokušana modifikacija forme koja se upotrebljava za zadnji dio pri supersoničnim brzinama.

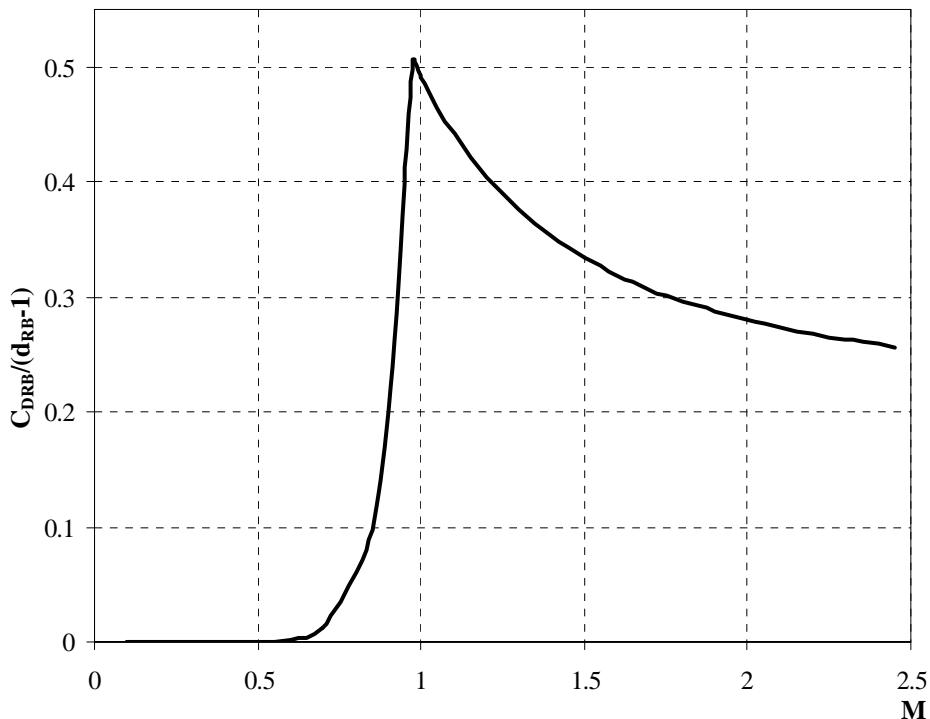
Sykes [15] je izmjerio raspodjelu pritiska na zadnjem dijelu pri transoničnim brzinama i integracijom pritiska dobio vrijednosti koeficijenta otpora zadnjeg dijela projektila. Sasvim dobra korelacija Sykes-ovih podataka sa parametrom sličnosti je pronađena u obliku:

$$\left[C_{D_{BT}} \right] = 4tg^2 \beta (1 + 0.5tg\beta) \left\{ 1 - e^{-2L_{BT}} + 2tg\beta \left[e^{-2L_{BT}} (L_{BT} + 0.5) - 0.5 \right] \right\} \quad (4.12)$$

Jednačina mora biti izvođena za fiksne Mach-ove brojeve. Očito je da ova korelacija otpora zadnjeg dijela pri transoničnim brzinama nije tako dobra kao ona koja je dobivena za supersonične brzine.

4.2.3 Koeficijent otpora pritiska za vodeći prsten

Moore je izvršio testove u balističkom tunelu da bi odredio uticaj vodećeg prstena na otpor. Dijagram 4.3 [16] pokazuje promjenu koeficijenta otpora vodećeg prstena sa promjenom Mach-ovog broja. Priraštaj koeficijenta otpora za vodeći prsten se nalazi množenjem krive sa dijagrama 4.3 sa razlikom $(d_{RB} - 1)$, gdje je d_{RB} prečnik vodećeg prstena u kalibrima.



Slika 4.3: Priraštaj koeficijenta otpora za vodeći prsten [16]

Predviđena lokacija vodećeg prstena je blizu kraja srednjeg dijela cilindrične sekcije, tako da će upotreba navedenog dijagrama rezultirati malom greškom ukoliko je vodeći prsten pomjerен naprijed.

Za tačnije predviđanje ovog koeficijenta neophodno je imati rezultate eksperimentalnih mjerjenja koeficijenta otpora vodećeg prstena zavisno od oblika i lokacije vodećeg prstena na projektilu. Udio koeficijenta otpora vodećeg prstena u ukupnom koeficijentu otpora iznosi manje od 5% .

4.2.4 Koeficijent otpora trenja

Koeficijent otpora trenja, $C_{D_{SF}}$, je dat izrazom:

$$C_{D_{SF}} = \frac{4}{\pi} C_f S_w$$

gdje je:

C_f - koeficijent trenja za glatku ravnu ploču

S_w - površina omotača (plašta) projektila (kalibri²)

Za laminarni granični sloj, Blasius-ova formula (3.27), sa korekcijom za uticaj kompresibilnosti je:

$$C_{f_l} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} (1 + 0.12M^2)^{-0.12}$$

gdje je:

C_{f_l} - koeficijent trenja za laminarno opstrujavanje

Re_l - Reynolds-ov broj, baziran na dužini projektila

Prandtl-ova empirijska formula za turbulentni granični sloj (3.28), korigovana za kompresibilnost, je:

$$C_{f_T} = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_l)^{2.58}} (1 + 0.21M^2)^{-0.32}$$

gdje je C_{f_T} koeficijent trenja za turbulentno opstrujavanje.

Schlichting, u svojoj knjizi "Teorija graničnog sloja", ukazuje na dobro slaganje između prethodne jednačine i Van Driest-ove kompletnejše teorije za kompresibilni turbulentni granični sloj uz adijabatski zid [16]. Prandtl-ova empirijska formula za koeficijent trenja pri turbulentnom opstrujavanju je mnogo lakša za korištenje od Van Driest-ovog modela (koristi se u modelu AP72) koji zahtijeva iterativno numeričko rješenje.

Površina prednjeg dijela projektila se predstavlja aproksimacijom:

$$S_{w_n} = \frac{\pi}{2} L_N \left(1 + \frac{1}{8L_N^2} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{50L_N^2} \right) \left(R_T / R \right) \right] \quad (4.13)$$

Za konusni zadnji dio malog ugla ili za zadnji dio u obliku konusa koji se širi (divergentni zadnji dio), razlika u površini između aktualnog zadnjeg dijela i cilindra ekvivalentne dužine je zanemarljiva.

Površina cilindričnog dijela se aproksimira sa izrazom:

$$S_{w_{CYL}} = \pi \cdot (L_T - L_N) \quad (4.14)$$

gdje je L_T ukupna dužina projektila u kalibrima.

Reynolds-ov broj, baziran na ukupnoj dužini projektila, je:

$$\text{Re}_l = \frac{U_\infty l}{\nu}$$

gdje su:

U_∞ - brzina slobodnog toka

l - ukupna dužina projektila

ν - kinematska viskoznost

Pošto je $U_\infty = aM$, gdje je a brzina zvuka u vazduhu, a $l = L_T d_{ref}$, gdje je d_{ref} referentni prečnik projektila, Reynolds-ov broj se može napisati kao:

$$\text{Re}_l = 23296.3 M L_T d_{ref} \quad (4.15)$$

gdje referentni prečnik mora biti izražen u milimetrima. Ovaj izraz daje Reynolds-ov broj za nivo mora, pri temperaturi od 15°C .

Koefficijent otpora trenja se računa za potpuni laminarni granični sloj i za potpuni turbulentni granični sloj, a zatim se uzima sredina zavisno od približne lokacije tranzicije (prelaska iz laminarnog u turbulentni granični sloj). Za većinu borbenih projektila prelaz nastaje pri kraju prednjeg dijela. Zbog toga su za karakter graničnog sloja date samo dvije opcije: potpuno turbulentni tok, i laminarni tok na prednjem dijelu a turbulentni tok na srednjem dijelu. Iskustvo pokazuje da bi druga opcija trebala biti korištena za glatke projektile prečnika ispod 20 mm, a prva opcija za veće projektile, ali ne postoji nepogrešivo rješenje za ovu odluku. Veoma pouzdana metoda koja omogućava uočavanje mjesta promjene tipa strujanja je metoda sjenki (Schlieren-ov metod).

4.2.5 Koefficijent baznog otpora

Tačna procjena baznog koefficijenta otpora zahtijeva jednako tačnu procjenu odnosa baznog pritiska prema statičkom pritisku slobodnog toka. Charman [17] je pokazao da za projektile pri supersoničnim brzinama, bazni pritisak veoma zavisi od dostignutog Mach-ovog broja i od karaktera graničnog sloja iza baze. Većina borbenih projektila ima turbulentni granični sloj u blizini baze.

U literaturi nema parametra sličnosti za korelaciju sa podacima baznog pritiska i za ovu namjenu su izvedena određena izučavanja da bi se odredio empirijski izraz koji tačno opisuje postojeće podatke.

Odnos baznog pritiska, P_B , i statičkog pritiska slobodnog toka, p_∞ , je dat jednačinom [16]:

$$\left[\frac{P_B}{p_\infty} \right] = \left[1 + 0.09 M^2 (1 - e^{-L_{cn}}) \right] \left[1 + 0.25 M^2 (1 - d_B) \right] \quad (4.16)$$

gdje je:

P_B - bazni pritisak

p_∞ - statički pritisak slobodnog toka

d_B - prečnik baze projektila

Koeficijent baznog otpora, C_{D_B} , se onda može odrediti relacijom:

$$C_{D_B} = \frac{2d_B^2}{\gamma M^2} \left(1 - \frac{P_B}{p_\infty} \right) \quad (4.17)$$

Prethodna diskusija o koeficijentu otpora zadnjeg dijela i o koeficijentu baznog otpora se odnosi samo na konusne zadnje dijelove projektila. Može se konstatovati da predstavljena teorija omogućava tačno predviđanje ukupnog koeficijente otpora i za projektile sa zadnjim dijelom u obliku konusa koji se širi ($d_B > 1$). Ovaj rezultat obezbjeđuje razuman stepen pouzdanosti da izvedeni poluempijski parametri sličnosti, za koeficijente otpora zadnjeg dijela i baze, odgovaraju fizičkoj realnosti.

4.3 Aeroprediction Code 72 (AP72)

Program se zasniva na analitičkim procedurama uz manji stepen empirijskih podataka i služi za predviđanje statičkih aerodinamičkih karakteristika složene konfiguracije projektila. To znači da prednji dio može biti šiljat, zatupljen ili zaobljen sa sfernom kapom, a mogu biti prisutna i dva oživila (za tipični projektil postoji diskontinuitet između upaljača koji ima jednu konturu i oživila prednjeg dijela). Iza prednjeg dijela se nalazi cilindrični dio iza kojeg slijedi konvergentni ili divergentni konusni zadnji dio.

4.3.1 Talasni otpor

Talasni otpor rezultira iz ekspanzije i kompresije vazduha dok on teče preko površine tijela. Kompresija zraka predstavlja se u obliku udarnih talasa koji prvo nastaju oko Mach-ovog broja 0.7 do 0.9 što zavisi od oblika tijela. Metode koje se koriste za proračun ovog oblika otpora značajno se razlikuju za transonični i supersonični tok.

4.3.1.1 Supersonični tok

Postoje dvije metode, od nekoliko dostupnih, za proračun raspodjele pritiska pri supersoničnom opstrujavanju koje zadovoljavaju zahtjeve brzine proračuna i tačnosti. To su Van Dyke-ova teorija poremećaja drugog reda i teorija udar-eksplozija drugog reda modifikovana za zatupljena tijela. Iako se veći dio leta većine projektila odvija pri nižim supersoničnim brzinama, teorija poremećaja se primjenjuje jer je tačnija od teorije udar-eksplozija pri ovim Mach-ovim brojevima. Ipak, Van Dyke-ova teorija se može primjeniti samo na tijela kod kojih je nagib manji od nagiba Mach-ovih linija slobodnog toka. Prema tome, za konfiguraciju sa zatupljenim prednjim dijelom, teorija perturbacija se kombinuje sa modifikovanom Newton-ovom teorijom [20].

Osnovni problem poremećaja prvog reda je:

$$\begin{aligned} \phi_{rr} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{\phi_{\theta\theta}}{r^2} - (M^2 - 1)\phi_{xx} &= 0 \\ \phi(0, r, \theta) = \phi_x(0, r, \theta) &= 0 \\ \phi_r(x, r, \theta) + \sin \alpha \cos \theta &= R'[\cos \alpha + \phi_x(x, r, \theta)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdje indeksi označavaju parcijalna diferenciranja.

Problem prvog reda je tačno zadovoljen pomoću funkcije:

$$\phi(x, r, \theta) = \psi(x, r) \cos \alpha + \zeta(x, r) \sin \alpha \cos \theta \quad (4.19)$$

gdje prvi izraz odgovara rješenju aksijalnog opstrujavanja a drugi odgovara rješenju poprečnog opstrujavanja. Problem prvog reda može se razdvojiti na:

- problem aksijalnog opstrujavanja

$$\begin{aligned} \psi_{rr} + \frac{\psi_r}{r} - \beta^2 \psi_{xx} &= 0 \\ \psi(0, r) = \psi_x(0, r) &= 0 \\ \psi_r(x, R) &= R'[1 + \psi_x(x, R)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

- problem poprečnog opstrujavanja

$$\begin{aligned} \zeta_{rr} + \frac{\zeta_r}{r} - \frac{\zeta}{r^2} - \beta^2 \zeta_{xx} &= 0 \\ \zeta(0, r) = \zeta_x(0, r) &= 0 \\ 1 + \zeta_r(x, R) &= R' \zeta_x(x, R) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Rješenje jednačina se nalazi numerički postavljanjem izvora raspodjele i dipola respektivno duž x-ose.

Van Dyke je ustanovio aksijalno rješenje drugog reda u zavisnosti od rješenja prvog reda ψ . Dakle, kako poremećaji u ravni poprečnog toka nemaju uticaj na pritisak kao što imaju poremećaji u aksijalnom toku, Van Dyke je rezonovao da je fizikalno opravdano da se kombinuju aksijalno rješenje drugog reda sa rješenjem poprečnog toka prvog reda u obliku hibridne teorije. Kada su izračunate perturbacije brzina ψ_x , ψ_r (aksijalna drugog reda) i ζ_x , ζ_r (poprečna prvog reda) u svakoj tački duž površine tijela, komponente lokalne brzine su

$$\begin{aligned} \frac{u}{V_\infty} &= (\cos \alpha)(1 + \psi_x) + (\sin \alpha \cos \theta)(\zeta_x) \\ \frac{v}{V_\infty} &= (\cos \alpha)(\psi_r) + (\sin \alpha \cos \theta)(1 + \zeta_r) \\ \frac{w}{V_\infty} &= -(\sin \alpha \sin \theta) \left(1 + \frac{\zeta}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Koeficijent pritiska na bilo kojem mjestu na tijelu je tada:

$$C_p(x, \theta) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left| 1 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right|^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\} \quad (4.23)$$

Aerodinamički koeficijent talasnog otpora šiljatog tijela je:

$$C_A = \frac{1}{S} \iint_P C_p r \frac{dr}{dx} d\theta dx$$

Ako je prednji dio projektila zatupljen ili zaobljen sa sfernom kapom, koristi se modifikovana Newton-ova teorija. Modifikovani Newton-ov koeficijent pritiska je [39]:

$$C_p = C_{p_0} \sin^2 \delta \quad (4.24)$$

gdje je δ ugao između tangente na lokalnu površinu tijela i pravca slobodnog toka, a zaustavni pritisak iza normalnog udarnog talasa:

$$C_{p_0} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.25)$$

Ako je prednji dio zatupljen, tada pritisak na zatupljenom dijelu iznosi oko 90% od vrijednosti zaustavnog pritiska. Ako prednji dio ima sfernu kapu, tada je:

$$\delta = \sin^{-1}(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \cos \theta \sin \alpha) \quad (4.26)$$

gdje je:

$$\tan \beta = \frac{dr}{dx} \quad (4.27)$$

Modifikovani Newton-ov koeficijent pritiska je u tom slučaju:

$$C_p = C_{p_0} \left(\sin^2 \beta \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha \sin \beta \cos \beta \cos \theta + \cos^2 \beta \cos^2 \theta \sin^2 \alpha \right) \quad (4.28)$$

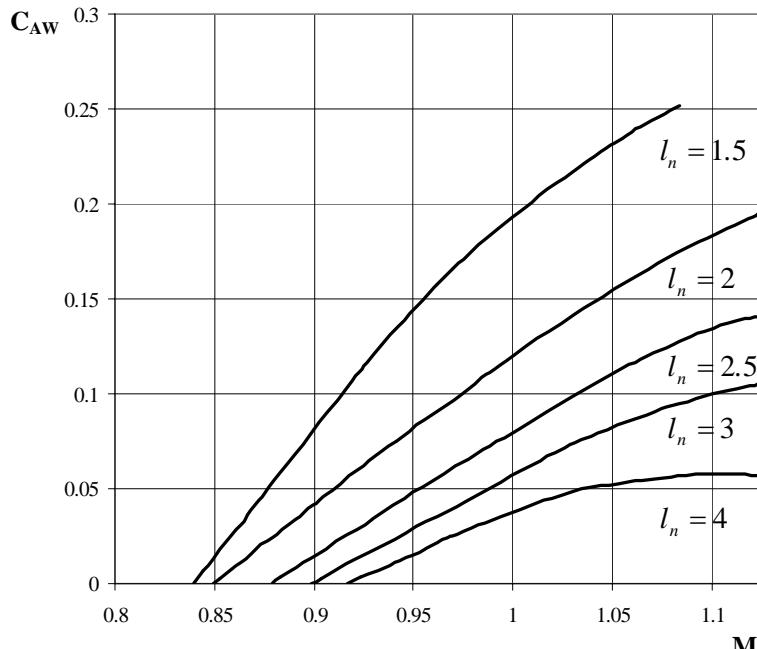
4.3.1.2 Transoničan tok

Ako je tok transoničan, dostupne teorije za proračun talasnog otpora imaju ograničenja. Glavno ograničenje je geometrija tijela, jer nema dostupnih teorija za proračun ako je tijelo zatupljeno ili postoje diskontinuiteti duž površine tijela. Wu i Aoyoma [18] su razvili metod za konfiguraciju tangentni ožival-cilindar-konusni zadnji dio, ali bez opšte geometrije prednjeg dijela koja se može koristiti kao u slučaju supersoničnog toka.

Jednačina poremećaja za transonični tok za $\alpha = 0$ je:

$$\left[1 - M_\infty^2 - (\gamma+1)M_\infty^2 \phi_x \right] \phi_{xx} + \frac{\phi_r}{r} + \phi_{rr} = 0 \quad (4.29)$$

Jednačina je nelinearna i rješava se numerički. Za dati Mach-ov broj i dužinu prednjeg dijela, koeficijent aksijalne sile uslijed pritiska određuje se iz krive sa dijagrama 4.4 interpolacijom.



Slika 4.4: Transonični talasni otpor tangentnog oživala [20]

Koefficijent otpora zadnjeg dijela pri nultom napadnom uglu u transoničnom toku, za $1 \leq M_\infty < 1.2$, dat je izrazom:

$$C_p(x) = -\frac{2}{5} \frac{(x_1 - C)}{\sqrt{(\gamma + 1)M_\infty^{2/3}}} \left[\frac{1}{25} \frac{(x_1 - C)^2}{(\gamma + 1)M_\infty^{2/3}} - \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 \quad (4.30)$$

pri čemu se x_1 mjeri od ruba zadnjeg dijela projektila, a C je definisano izrazom (4.31):

$$C^2 = 25(\gamma + 1)M_\infty^{2/3} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} + \left[\begin{array}{l} \left[\frac{5}{4} \left(\frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right)^2 + \frac{2}{M_\infty^{2/3}} \left(\frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1)M_\infty^2} \right) \left(\frac{3 \frac{dR}{dx}}{2\sqrt{\gamma + 1}} \right)^{2/3} + \right]^{1/2} \\ + \left(\frac{3 \frac{dR}{dx}}{2M_\infty \sqrt{\gamma + 1}} \right)^{4/3} \end{array} \right] \right\}$$

Za $M_\infty < 1$, eksperimenti pokazuju da udarni talas nastaje prvo na zadnjem dijelu pri $M_\infty \approx 0.95$. U skladu s tim, može se pretpostaviti linearna zavisnost talasnog otpora zadnjeg dijela od nule pri $M_\infty = 0.95$ do maksimalne vrijednosti pri $M_\infty = 1$ koja se računa korištenjem gornje jednakosti.

4.3.2 Otpor trenja

Granični sloj je općenito turbulentan preko više od 90% tijela projektila za projektile velikog kalibra. Kako je područje laminarnog toka manje od 10% na ukupnoj površini omotača projektila, može se pretpostaviti da je granični sloj turbulentan, pa se srednji koefficijent otpora trenja može se odrediti prema Van Driest-u:

$$\frac{0.242}{A \sqrt{C_{f\infty}} \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2}} (\arcsin C_1 + \arcsin C_2) = \log(\text{Re}_\infty C_{f\infty}) - \frac{1+2n}{2} \log \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right) \quad (4.32)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2A^2 - B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} & C_2 &= \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} \\ A &= \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_\infty^2}{2 \frac{T_w}{T_\infty}}} & B &= \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{\frac{T_w}{T_\infty}} - 1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Varijabla n se određuje iz zakona viskoznosti:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^n \quad (4.34)$$

i za vazduh iznosi 0.76. Da bi se odredio srednji koeficijent otpora trenja potrebno je poznavati vrijednosti za: T_w/T_∞ , Reynolds-ov i Mach-ov broj slobodnog toka.

Reynolds-ov broj slobodnog toka je:

$$\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty l}{\mu_\infty}$$

Pomoću popravnog faktora definisanog izrazom:

$$R_T = \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) \frac{2}{(\gamma - 1) M_\infty^2} \quad (4.35)$$

koji je za turbulentni tok jednak trećem korjenu iz Prandtl-ovog broja, tj.

$$R_T = \sqrt[3]{P_r} = 0.90 \quad (4.36)$$

dobijemo:

$$\frac{T_w}{T_\infty} = 1 + 0.9 \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \quad (4.37)$$

Uz poznate uslove slobodnog toka, srednji koeficijent otpora trenja se određuje numerički, metodom Newton-Raphson, pa je koeficijent viskozne aksijalne sile:

$$C_{A_f} = C_{f\infty} \frac{S_w}{S} \quad (4.38)$$

pri čemu je S_w površina omotača projektila (isključujući površinu dna).

4.3.3 Otpor dna

I pored velikog broja teoretskih radova za predviđanje baznog pritiska još uvijek ne postoji zadovoljavajuća teorija koja se može primjeniti, pa je standardna praksa upotreba empirijskih metoda. Kriva srednjeg baznog pritiska za cilindrični zadnji dio sa potpuno razvijenim turbulentnim tokom ispred dna dobivena je iz eksperimentalnih podataka (sl. 3.13). Može doći do odstupanja od ovih vrijednosti uslijed male vitkosti projektila, zadnjeg dijela, napadnog ugla, Reynolds-ovog broja i temperature površine.

Minimalna dužina većine projektila je oko četiri kalibra. Pri niskim supersoničnim brzinama bazni pritisak ne zavisi od promjene u dužini projektila ako je vitost projektila veća od četiri. Ovo nije tačno pri višim supersoničnim i hipersoničnim brzinama, ali pošto je glavni interes kod osnosimetričnih brzorotirajućih projektila opstrujavanje do 3 Mach-a, efekti vitkosti projektila na bazni pritisak se mogu zanemariti.

Osim toga, oblik prednjeg dijela ima mali uticaj na bazni pritisak za projektile velike vitkosti. Prema tome, za projektile čija je vitost četiri ili veća, uticaj oblika prednjeg dijela i ukupne dužine na bazni otpor se ne uzimaju u obzir.

Bazni pritisak je značajno uslovljen prisustvom zadnjeg dijela, što se može izraziti preko empirijske formule [19]:

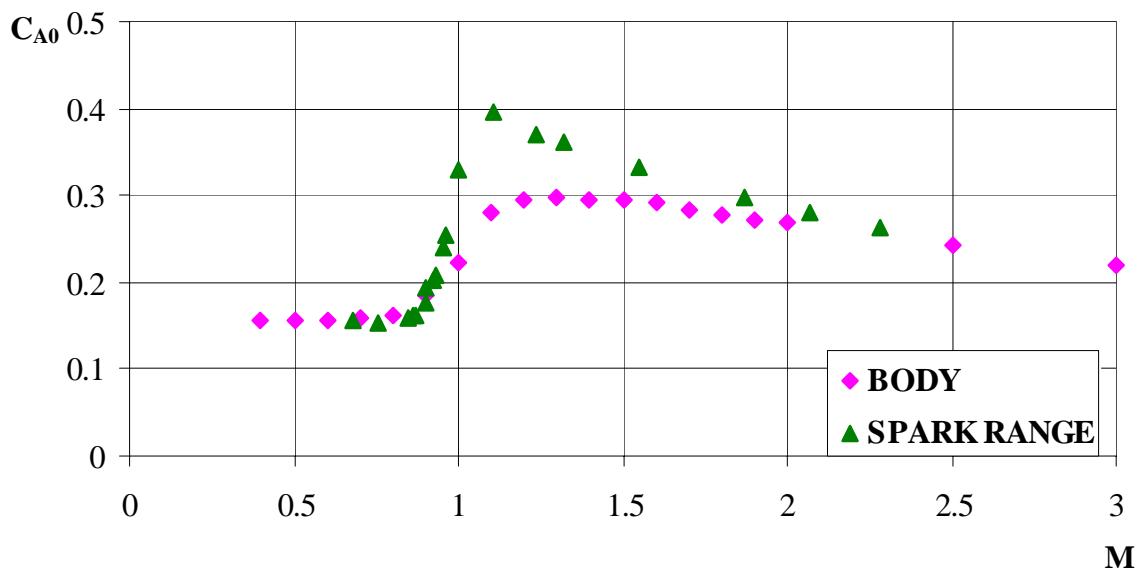
$$C_{A_B} = -C_{p_B} \left(\frac{d_B}{d} \right)^3 \quad (4.39)$$

Ukoliko je poznat koeficijent baznog pritiska za dati ugao nagiba zadnjeg dijela, C'_{p_B} , onda se koeficijent otpora dna određuje iz:

$$C_{A_B} = -C'_{p_B} \left(\frac{d_B}{d} \right)^2 \quad (4.40)$$

4.4 Komparacija modela

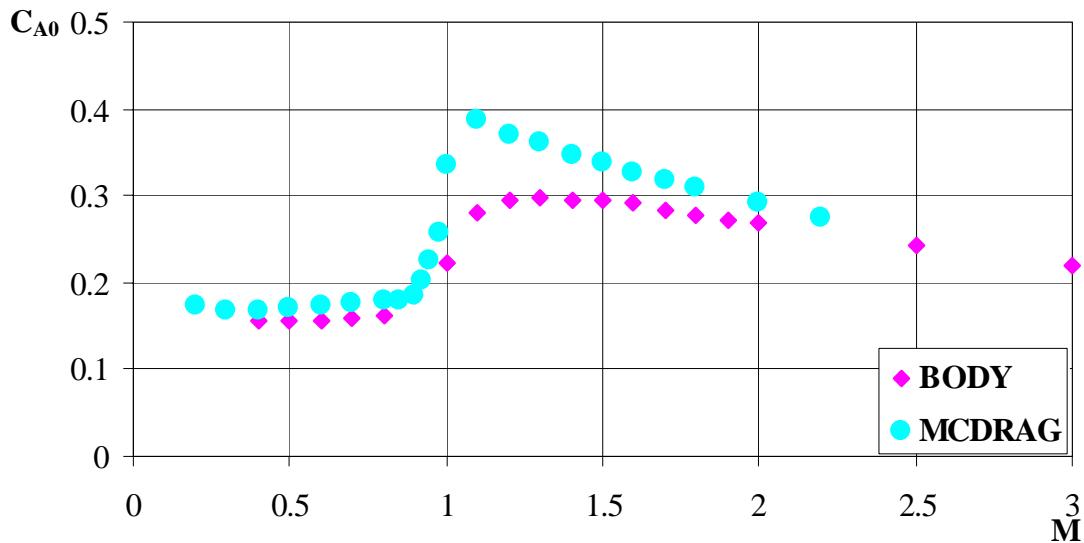
Za procjenu tačnosti modula za predviđanje aksijalne sile osnosimetrične brzorotirajuće konfiguracije projektila modela BODY izvršeno je poređenje eksperimentalnih rezultata sa datim modelom. Ustanovljena su značajna odstupanja, naročito pri transoničnim brzinama (slika 4.5).



Slika 4.5: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu projektila 155 mm M483A1
(konfiguracije: upaljač-ožival-cilindar-konus)

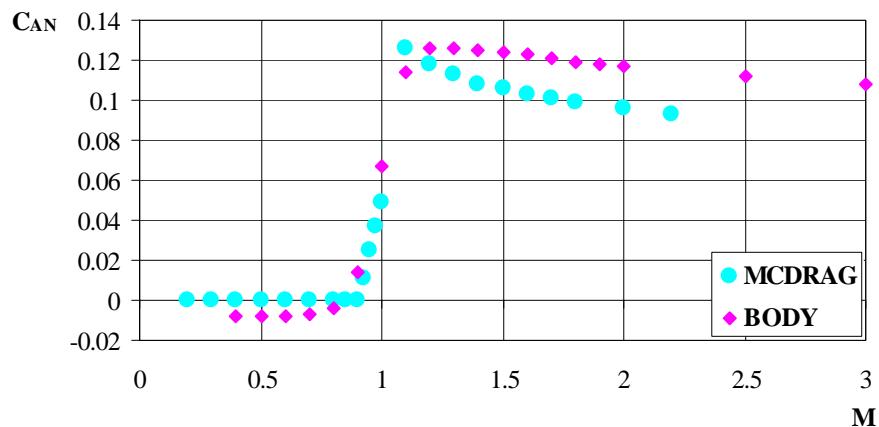
Pošto u eksperimentalnim rezultatima kao i rezultatima iz modela PRODAS-a nema podataka o komponentama koje sačinjavaju koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu, a ne raspolaže se upotrebljivim kodom za model AP72, izvršena je analiza vrijednosti dobivenih modelom BODY i onih koje su rezultat modela MCDRAG.

Koeficijenti otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra, 155 mm M483A1, konfiguracije upaljač-ožival-cilindar-vodeći prsten-konus, predviđeni pomoću modela BODY i modela MCDRAG pokazuju dobro slaganje u subsoničnom području, značajnu razliku u transoničnom području i području nižih supersoničnih brzina i manja odstupanja u supersoničnom području (slika 4.5a).



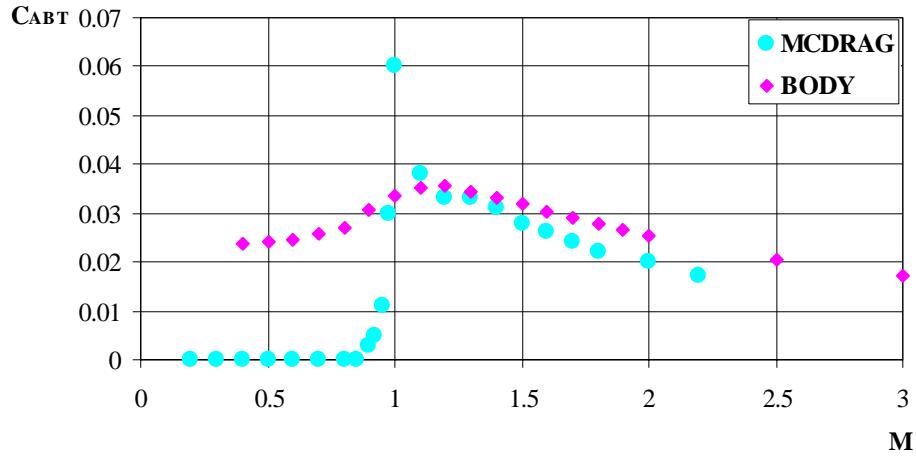
Slika 4.5a: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil 155 mm M483A1
(konfiguracije: upaljač-ožival-cilindar-konus)

Analiza pojedinih komponenata koeficijenta otpora vrši se s ciljem određivanja uzroka razlike između vrijednosti dobivenih ovim modelima.



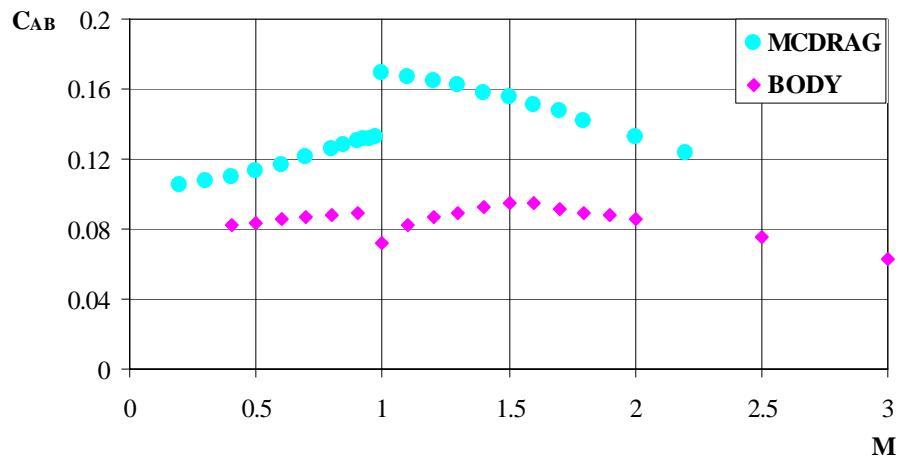
Slika 4.5b: Koeficijent otpora prednjeg dijela projektila velikog kalibra 155 mm M483A1
(konfiguracije: zatupljeni upaljač-ožival)

Vrijednosti koeficijenta otpora prednjeg dijela predviđene ovim modelima pokazuju dobro slaganje za $M < 1$ (u modelu MCDRAG se predviđa da je otpor prednjeg dijela jednak nuli u subsonici, dok se u modelu BODY dobivaju negativne vrijednosti). Za $1 \leq M \leq 1.2$ razlika u predviđenim vrijednostima je mala, nakon čega raste do $M = 2$, da bi nakon toga ostala približno konstantna.



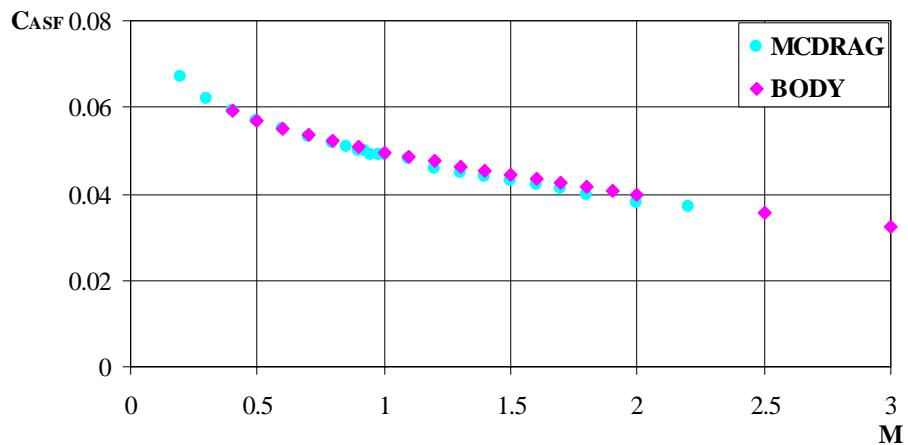
Slika 4.5c: Koeficijent otpora zadnjeg dijela, oblika konusa, za projektil 155 mm M483A1

Koeficijent otpora zadnjeg dijela određen pomoću modela MCDRAG ima maksimalnu vrijednost (pik) za $M = 1$, dok se pomoću modela BODY dobivaju uravnoteženje vrijednosti sa maksimumom pri $M = 1.2$. Razlika u subsoničnom području je značajna, jer se u modelu MCDRAG predviđa da nema otpora zadnjeg dijela.



Slika 4.5d: Koeficijent otpora dna za projektil 155 mm M483A1

Krive koeficijenta otpora dna imaju različit karakter u područjima transoničnih i nižih supersoničnih brzina. Za $M = 1$ prema modelu MCDRAG koeficijent otpora dna ima maksimalnu vrijednost, a prema modelu BODY minimalnu vrijednost, u transoničnom području. U području Mach-ovih brojeva od 1 do 1.5, kriva otpora dna predviđena modelom MCDRAG ima opadajući karakter, dok prema modelu BODY koeficijent otpora dna u ovom području raste.



Slika 4.5e: Koeficijent otpora trenja za projektil 155 mm M483A1

Koeficijenti otpora trenja predviđeni modelima BODY i MCDRAG pokazuju odlično slaganje za sve vrijednosti Mach-ovog broja.

Poređenje sa modelom AP72 nije bilo moguće ostvariti jer izvršni program nije raspoloživ.

Iz prikazanog se može zaključiti sljedeće:

- Kod koeficijenta otpora prednjeg dijela treba isključiti mogućnost pojave negativnih vrijednosti i izvršiti modifikaciju u područjima transoničnih i supersoničnih brzina, što se može ostvariti posmatranjem prednjeg dijela kao složenog, tj. uzimanjem u obzir i oblika upaljača.
- Razlike prikazane na slici 4.5c uslovile su potrebu iznalaženja dijagrama i empirijskih izraza veće tačnosti za područje zadnjeg konusa.
- Krive baznog otpora značajno se razlikuju, pa se modul koji se odnosi na ovu komponentu otpora treba potpuno izmjeniti.
- Koeficijent otpora trenja ima istu tendenciju, a poboljšanje se može ostvariti tačnijim proračunom površine omotača projektila.

5. Rezultati istraživanja

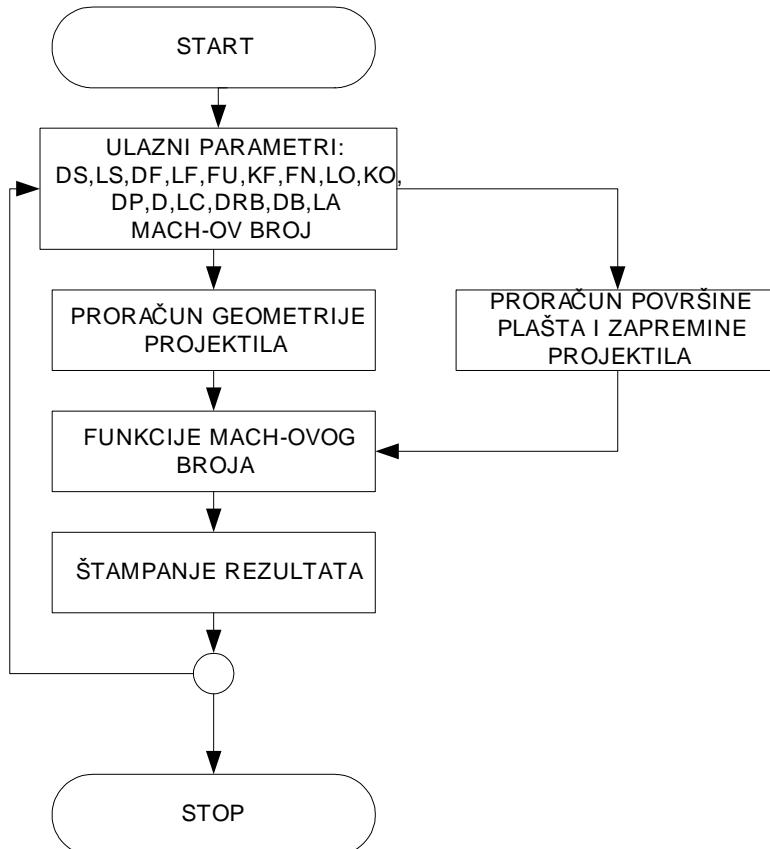
Na prostoru bivše Jugoslavije glavni model za predviđanje aerodinamičkih performansi projektila bio je model koji je razvio prof. Slobodan Janković [10]. U Bosni i Hercegovini nije bilo značajnijih pokušaja razvoja sopstvenog modela.

Iz tog razloga, analiziran je model prof. Jankovića, kao i rezultati istraživanja američkih stručnjaka [16, 20], što je omogućilo postavljanje sopstvenog modela za predviđanje sile otpora pri nultom napadnom uglu za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila.

Rezultat modifikacije modula za određivanje aksijalne sile osnosimetričnog brzorotirajućeg projektila u modelu BODY je model OTPOR, u kojem je zadržana algoritamska struktura modela BODY uz izmjenu modula za određivanje koeficijenata aksijalne sile prednjeg dijela, aksijalne sile zadnjeg dijela i aksijalne sile dna, i dodavanje modula za proračun koeficijenta aksijalne sile vodećeg prstena.

5.1 Model za predviđanje otpora

Model, nazvan OTPOR, izražen u programskom jeziku FORTRAN, pomoću kojeg se procjenjuje aerodinamički koeficijent otpora osnosimetričnog projektila pri nultom napadnom uglu ima ulaznu datoteku CONFIG.DAT, u koju se upisuju geometrijske karakteristike projektila i vrijednosti Mach-ovih brojeva i izlaznu datoteku AERO.TAB, u kojoj su pregledno ispisane vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata otpora (ukupni, prednji dio, zadnji dio, vodeći prsten, dno, trenje) za date Mach-ove brojeve.

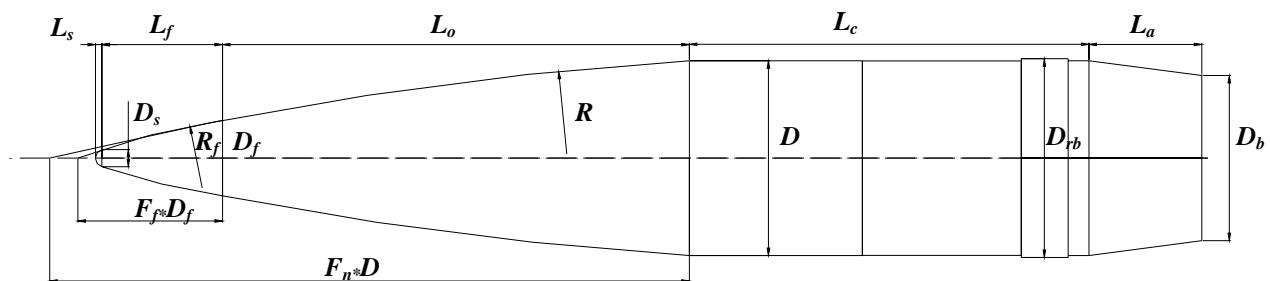


Slika 5: Dijagram toka programa OTPOR

Na osnovu geometrijskih karakteristika projektila, vrši se proračun geometrije koji obuhvata određivanje vitkosti upaljača, prednjeg i zadnjeg dijela, procjenu referentnih prečnika vrha projektila i dna, kao i procjenu ugla nagiba zadnjeg konusa. Za datu geometriju određuje se površina omotača projektila i zapremina projektila.

Komponente koeficijenta otpora projektila se procjenjuju u zavisnosti od Mach-ovog broja i proračunate geometrije na osnovu dijagrama i empirijskih formula.

5.1.1 Notacija



Slika 5.1: Ulazni podaci za program OTPOR

D_{rb} - prečnik vodećeg prstena

D_s - prečnik zaobljenja, odnosno zatupljenja na vrhu projektila

L_s - dužina zaobljenja na vrhu projektila

D_f - prečnik baze upaljača

L_f - dužina upaljača

K_f - recipročna vrijednost radijusa oživila upaljača

F_f - vitkost upaljača

F_n - vitkost prednjeg oživila

L_o - dužina prednjeg oživila

K - recipročna vrijednost radijusa prednjeg oživila

D_p - prečnik fiktivnog cilindra koji tangira ožival

D - kalibar projektila

L_c - dužina cilindričnog dijela

D_b - prečnik dna (baze) projektila

L_a - dužina zadnjeg dijela projektila

X_V - položaj težišta mjerен od fiktivnog vrha projektila

Sve vrijednosti u ulaznoj datoteci moraju biti izražene u metrima.

```

CONFIG.dat
1
0.15748 DRB
0.01524,0. DS, LS
0.05984, 0.095, 1.7895, 1.9492 DF, LF, KF, FU
2.9044, 0.34506, 0.681496, 0.15512 FN, LO, KO, DP
0.15481, 0.41847 D, LC
0.143486, 0.03947 DB, LA
0.547 XV
18,
0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.0, 2.5, 3.,
155mm M483A1

```

Slika 5.2: Primjer ulazne datoteke CONFIG.DAT za projektil 155 mm M483A1

5.1.2 Proračun koeficijenta otpora prednjeg dijela

Prednji dio projektila je, najčešće, složenog oblika, a sastoji se od vrha, koji može biti šiljat, zaobljen ili zatupljen, upaljača, koji ima oblik konusa ili oživila, i oživila ili konusa.

Aerodinamički koeficijent otpora složenog prednjeg dijela određuje se iz jednačine:

$$C_{xI} = \bar{r}^2 C_{xf} + C_{xI} [1 - \bar{r}^2 (3.1 - 1.4 \cdot \bar{r} - 0.7 \cdot \bar{r}^2)] \quad (5.1)$$

gdje su:

C_{xI} - aerodinamički koeficijent otpora složenog prednjeg dijela

C_{xf} - aerodinamički koeficijent otpora upaljača

C_{xI} - aerodinamički koeficijent otpora konusa ili oživila

\bar{r} - odnos prečnika baze upaljača i kalibra projektila,

a aerodinamički koeficijent otpora upaljača sa zatupljenim ili zaobljenim vrhom iz:

$$C_{xf} = \bar{r}_f^2 C_{xmc} + C_{xII} [1 - \bar{r}_f^2 (3.1 - 1.4 \bar{r}_f - 0.7 \bar{r}_f^2)] \quad (5.2)$$

gdje su:

C_{xII} - aerodinamički koeficijent otpora zarubljenog ili zatupljenog upaljača

C_{xmc} - aerodinamički koeficijent otpora zatupljenja ili zaobljenja

\bar{r}_f - odnos prečnika zatupljenja ili zaobljenja i prečnika baze upaljača

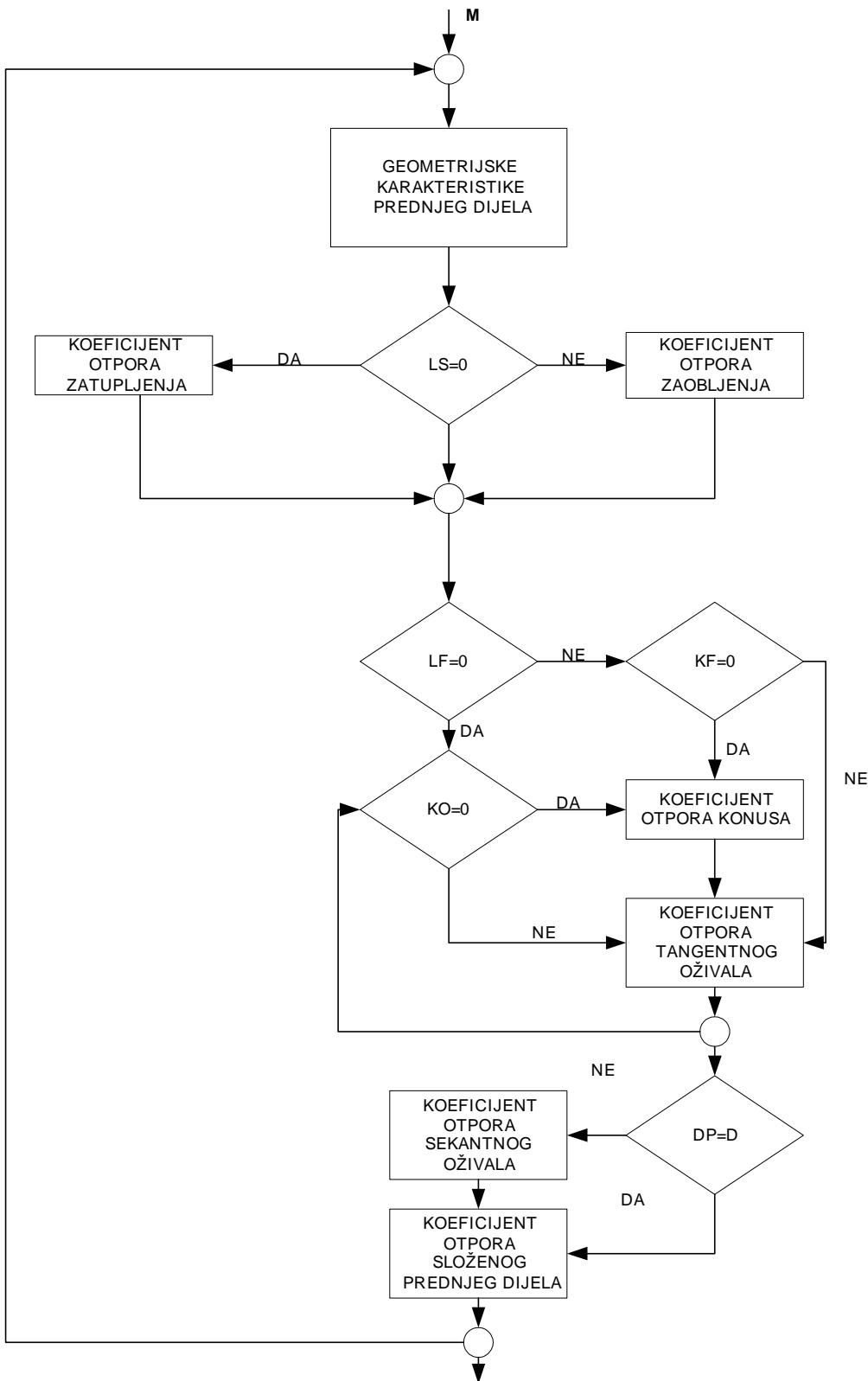
za slučaj da su i upaljač i prednji dio oblika oživila.

Ukoliko je upaljač konusnog oblika koristi se izraz

$$C_{xf} = \bar{r}_f^2 C_{xmc} + C_{xIk} [1 - \bar{r}_f^2] \quad (5.3)$$

gdje je:

C_{xIk} - aerodinamički koeficijent otpora šiljatog konusa



Slika 5.3: Dijagram toka modula za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora prednjeg dijela

Za određivanje koeficijenta otpora zaobljenog ili zatupljenog vrha projektila koriste se polinomi šestog reda određeni na osnovu krivih prikazanih na slici 3.6, koje predstavljaju zavisnost koeficijenta otpora od vitkosti i Mach-ovog broja [1].

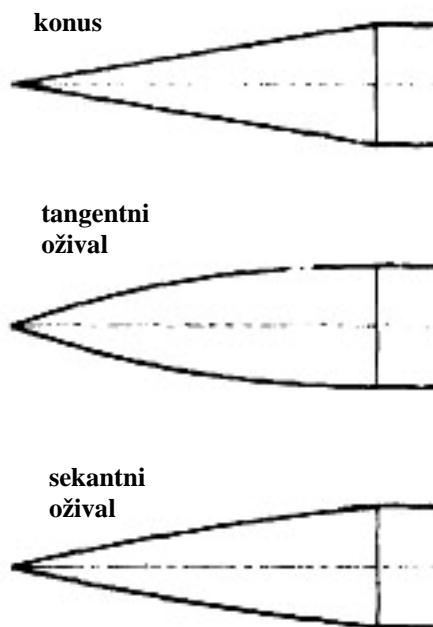
Za određivanje koeficijenta otpora tangentnog oživila korišten je dijagram iz literature [1], slika 3.9, koji je u podprogramu aproksimiran polinomima trećeg i šestog reda.

Za određivanje koeficijenta otpora konusa koriste se polinomi šestog reda određeni na osnovu krivih prikazanih na slici 3.7, koje predstavljaju zavisnost koeficijenta otpora od vitkosti i Mach-ovog broja [1].

Na navedenim dijagramima, prikazana je zavisnost koeficijenta otpora prednjeg dijela datog oblika u funkciji Mach-ovog broja za vitkosti 1.5, 2, 2.5, 3, 4 i 5 (zavisno od dijagrama). Kako se vitkost prednjeg dijela konkretnog projektila rijetko poklapa sa nekom od ovih vrijednosti, potrebno je interpolacijom odrediti koeficijent otpora za datu vitkost.

Zbog toga se u programu koristi Newton-ova formula za interpolaciju:

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \\ + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \\ + \dots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \quad (5.4)$$



Slika 5.4: Tipični oblici prednjeg dijela

Koeficijent otpora prednjeg dijela oblika sekantnog oživila računa se iz izraza:

$$C_{xso} = C_{xc} + (C_{xto} - C_{xc}) \cdot R_t \cdot \frac{1}{R}$$

gdje su:

C_{xso} - aerodinamički koeficijent otpora sekantnog oživila

C_{xc} - aerodinamički koeficijent otpora konusa

C_{xto} - aerodinamički koeficijent otpora tangentnog oživila

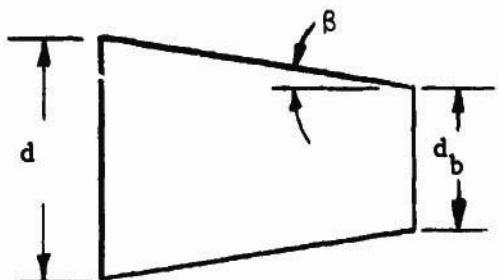
R - radijus stvarnog oživila

R_t - radijus tangentnog oživila koji ima istu vitkost kao i stvarni ožival

5.1.3 Proračun otpora zadnjeg dijela projektila

Ukoliko projektil ima zadnji dio, on može biti konusnog ili oživaljnog oblika.

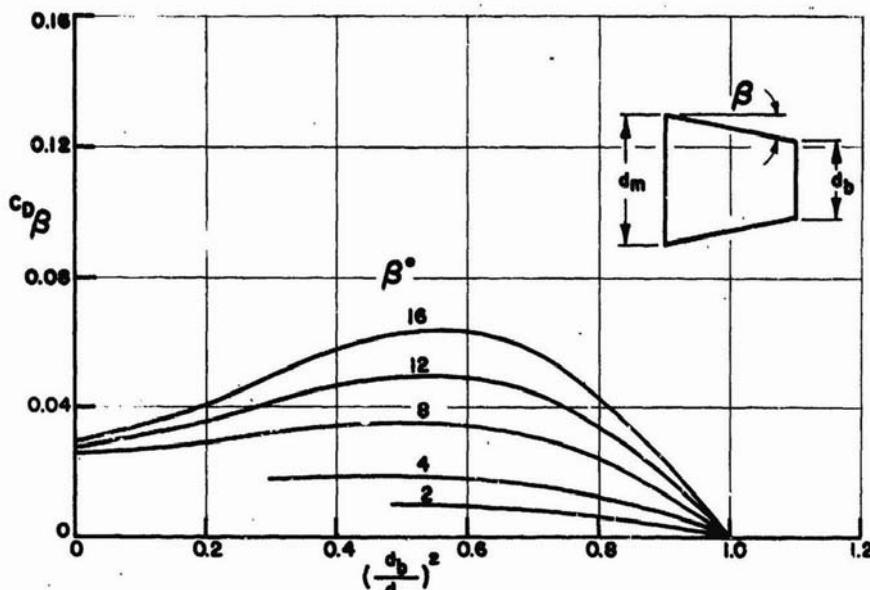
Aerodinamički koeficijent otpora zadnjeg dijela oblika konusa biće računat u podprogramu FCABT. Konusni zadnji dio je potpuno definisan sa uglom zadnjeg konusa β i odnosom d_b/d (prečnik baze (dna)/kalibar).



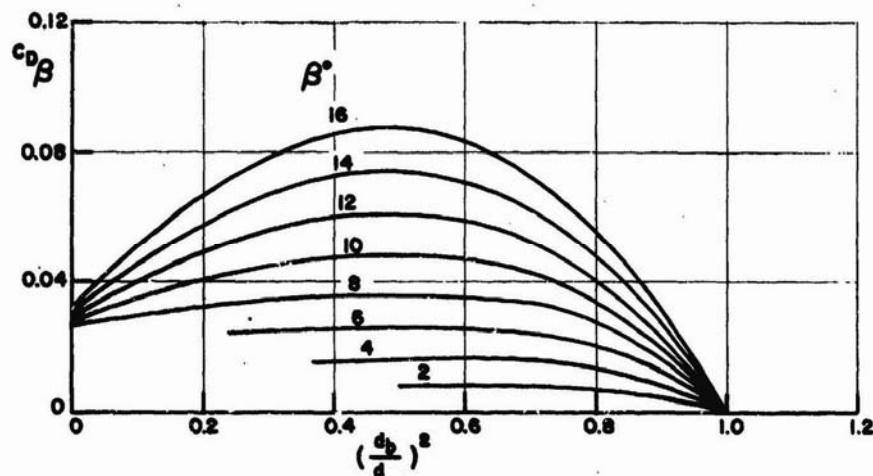
Slika 5.5: Konusni zadnji dio

U oblasti nižih subsoničnih brzina koeficijent otpora zadnjeg dijela se može zanemariti.

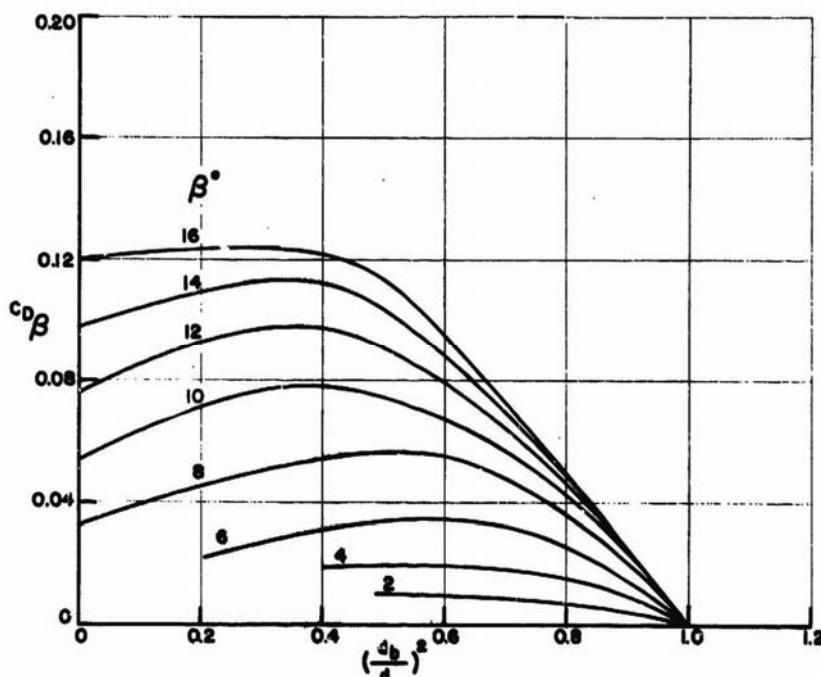
Na dijagramima 5.5a – 5.5g [2], koji su dobiveni eksperimentalnim putem, prikazana je zavisnost koeficijenta otpora zadnjeg dijela konusnog oblika u funkciji ugla zadnjeg konusa β i odnosa $(d_b/d)^2$ za Mach-ove brojeve u području subsonike i transonike.



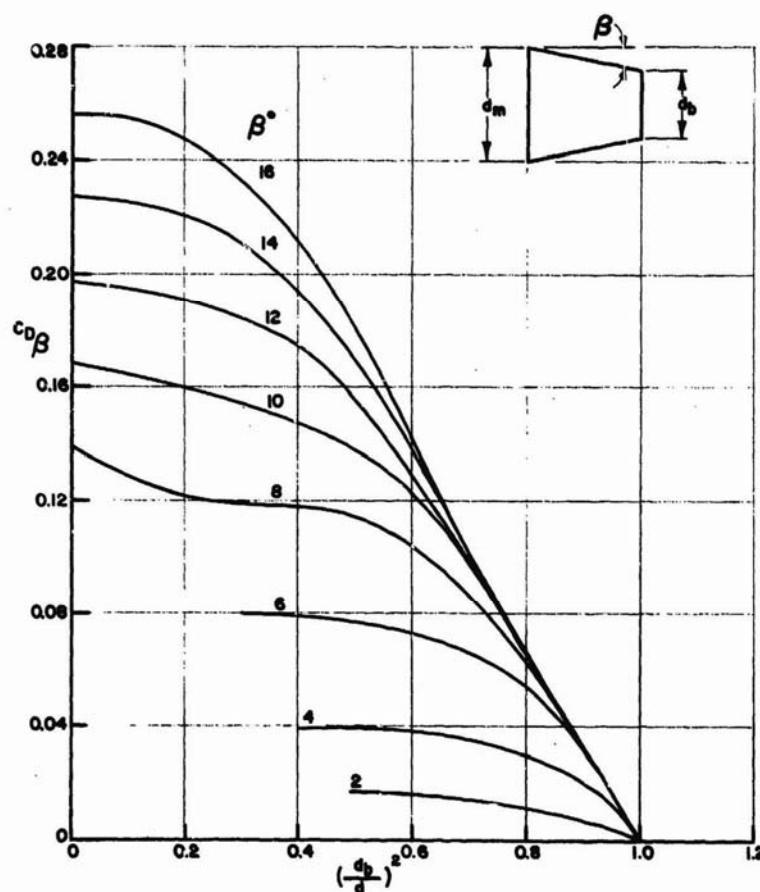
Slika 5.5a: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.6$ [2]



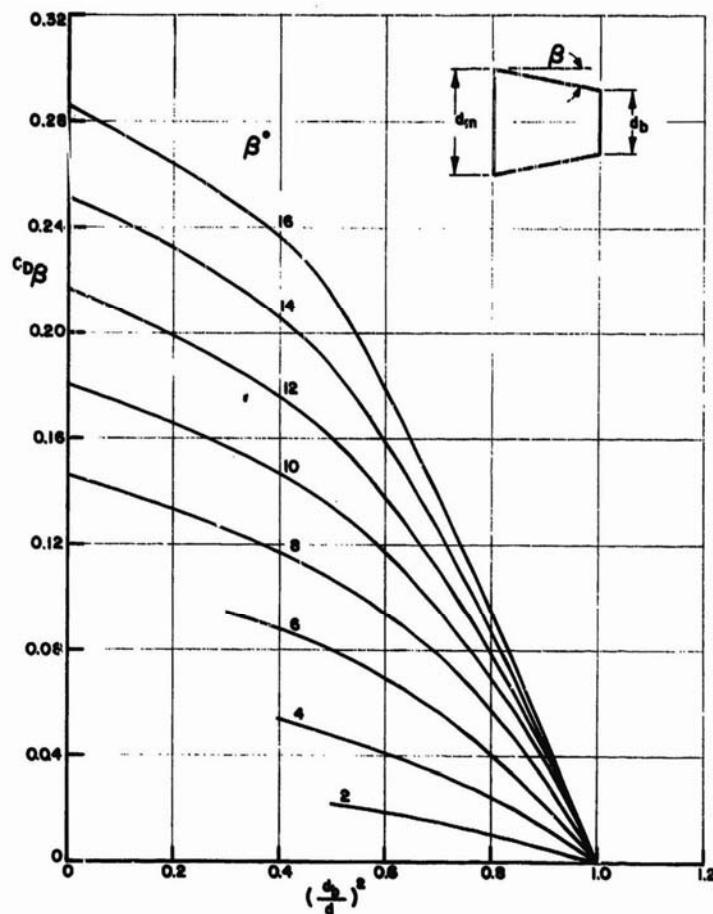
Slika 5.5b: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.8$ [2]



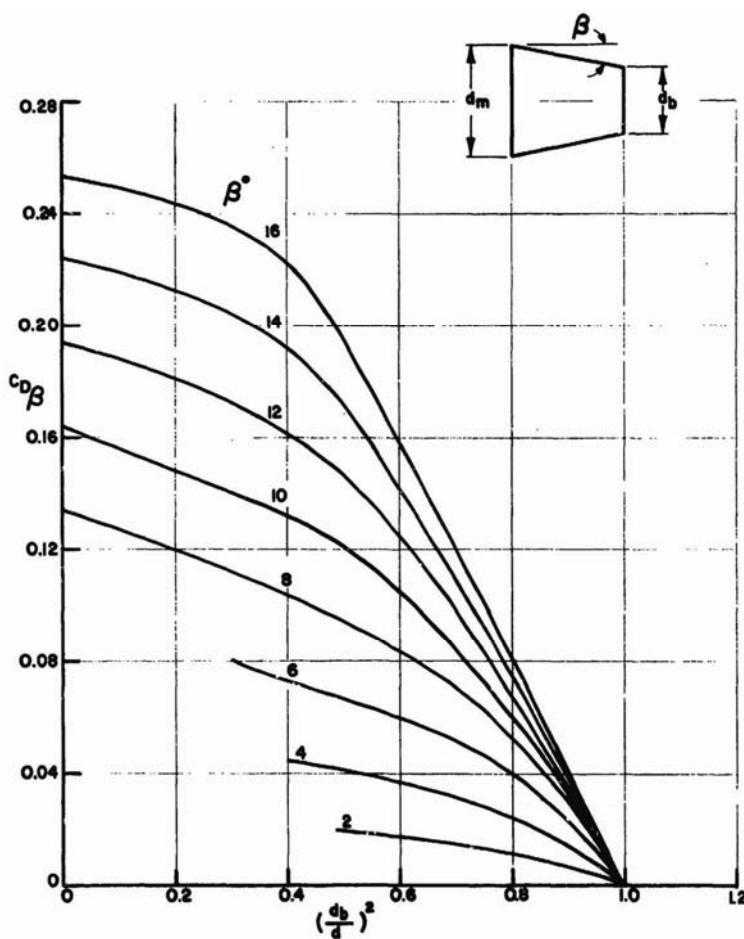
Slika 5.5c: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 0.9$ [2]



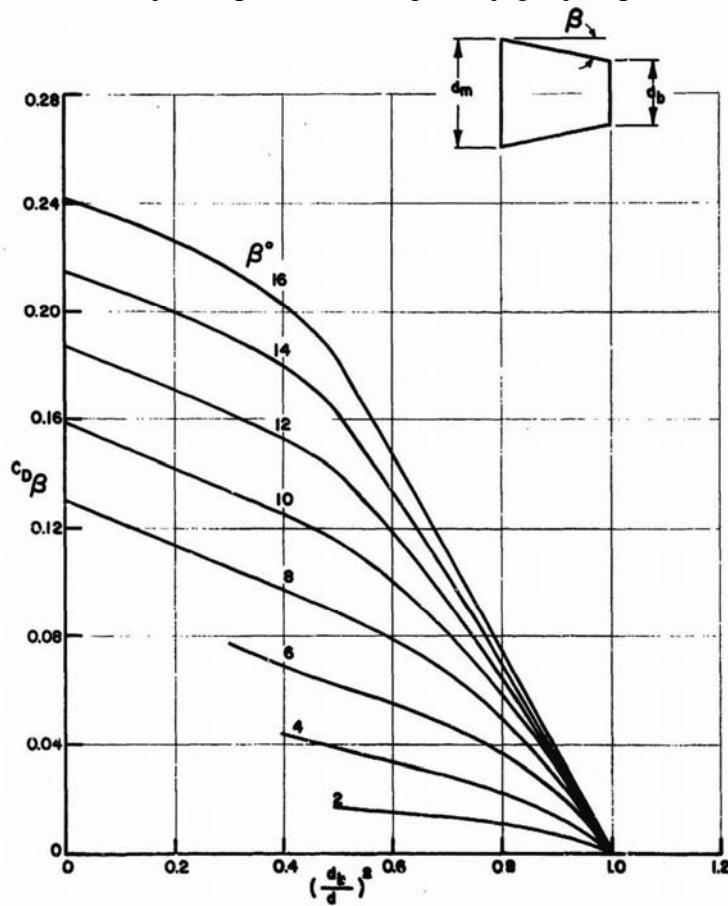
Slika 5.5d: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.0$ [2]



Slika 5.5e: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.1$ [2]



Slika 5.5f: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.2$ [2]



Slika 5.5g: Koeficijent otpora konusnog zadnjeg dijela pri $M = 1.3$ [2]

Eksperimenti su izvedeni za Mach-ove brojeve od 0.6 do 1.28 (1.3) i konusne zadnje dijelove sa uglom $\beta = 3.0, 5.6, 8.0, 16.0, 30.0$ i 45.0° . Odnos prečnika d_b/d eksperimentalnih modela je bio 0., 0.55, 0.7 i 0.85.

Postoji uočljiva promjena u karakteru krivih (za konstantno β) između Mach-ovih brojeva 0.6 i 0.9. Trend se nastavlja u supersoničnom području, iako poslije $M = 1.1$ relativne vrijednosti koeficijenta otpora zadnjeg dijela $C_{D\beta}$ opadaju. Promjene vrijednosti $C_{D\beta}$ između Mach-ovih brojeva 0.6 i 0.9 je naročito značajna za niže odnose $(d_b/d)^2$ i $\beta > 8^\circ$. U supersoničnom području vrijednosti $C_{D\beta}$ nastavljaju da rastu kako se odnos $(d_b/d)^2$ približava nuli. Ovo je u suprotnosti sa lučnim zadnjim dijelovima, u čijem slučaju koeficijent otpora zadnjeg dijela uslijed pritiska $C_{D\beta}$ dostiže maksimalnu vrijednost negdje između $0 < (d_b/d)^2 < 1.0$.

U modulu za predviđanje otpora zadnjeg dijela, za $M = 0.7$ koeficijent otpora je određen interpolacijom između vrijednosti za $M = 0.6$ i $M = 0.8$.

Za područje kada je $M > 1.3$, koeficijent otpora zadnjeg dijela, konusnog oblika (za male vrijednosti ugla β) uslijed pritiska, određen je pomoću pravila sličnosti razvijanjem jednačine malih poremećaja drugog reda u niz (4.10):

$$[C_{D\beta}] = \frac{4 \cdot A \cdot \operatorname{tg} \beta}{k} \left\{ \left(1 - e^{-kL_a} \right) + 2 \cdot \operatorname{tg} \beta \left[e^{-kL_a} \left(L_a + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right] \right\}$$

gdje su:

$[C_{D\beta}]$ - parametar sličnosti

L_a - dužina zadnjeg dijela u kalibrima

A - promjena koeficijenta pritiska zadnjeg dijela uslijed Prandtl-Mayer-ove ekspanzije

k - popravni koeficijent pritiska zadnjeg dijela

Izrazi A i k takođe rezultiraju iz teorije drugog reda, ali sadrže nepoznate koeficijente koji se određuju iz fitovanja metodom najmanjih kvadrata koeficijenta otpora zadnjeg dijela određenog metodom karakteristika, pa su:

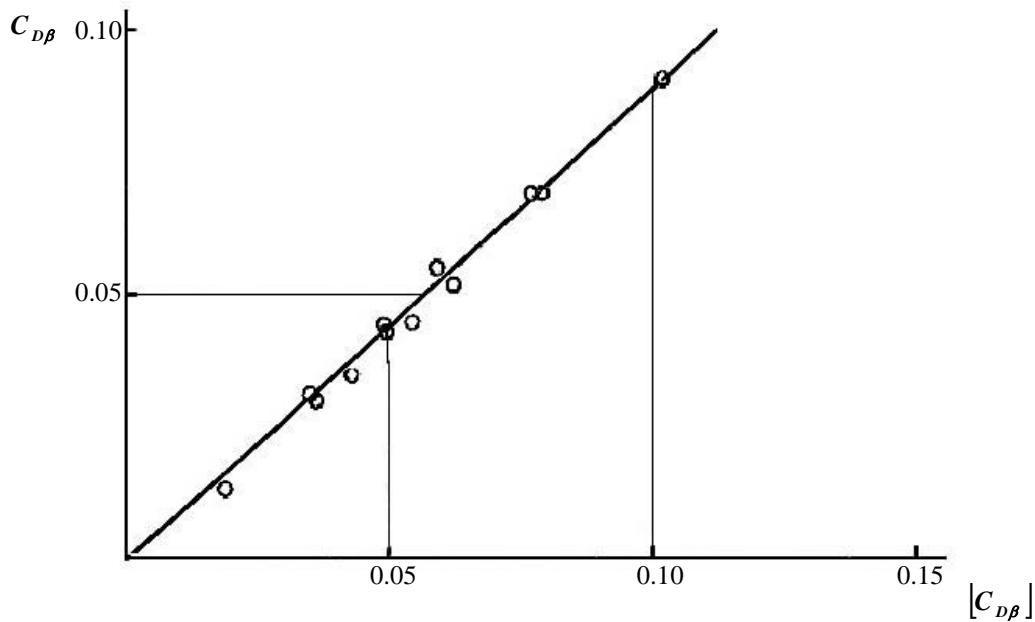
$$A = A_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{2L_c}{\gamma \cdot M^2}}} + \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{M^2 - 1}} - \frac{[(\gamma + 1)M^4 - 4(M^2 - 1)] \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{2 \cdot (M^2 - 1)^2}$$

$$A_1 = \left[1 - \frac{3 \cdot \left(\frac{R_T}{R} \right)}{5 \cdot M} \right] \cdot \left\{ \frac{5 \cdot \tau}{6 \cdot \sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{0.7435}{M^2} \cdot (\tau \cdot M)^{1.6} \right\}$$

$$k = \frac{0.85}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

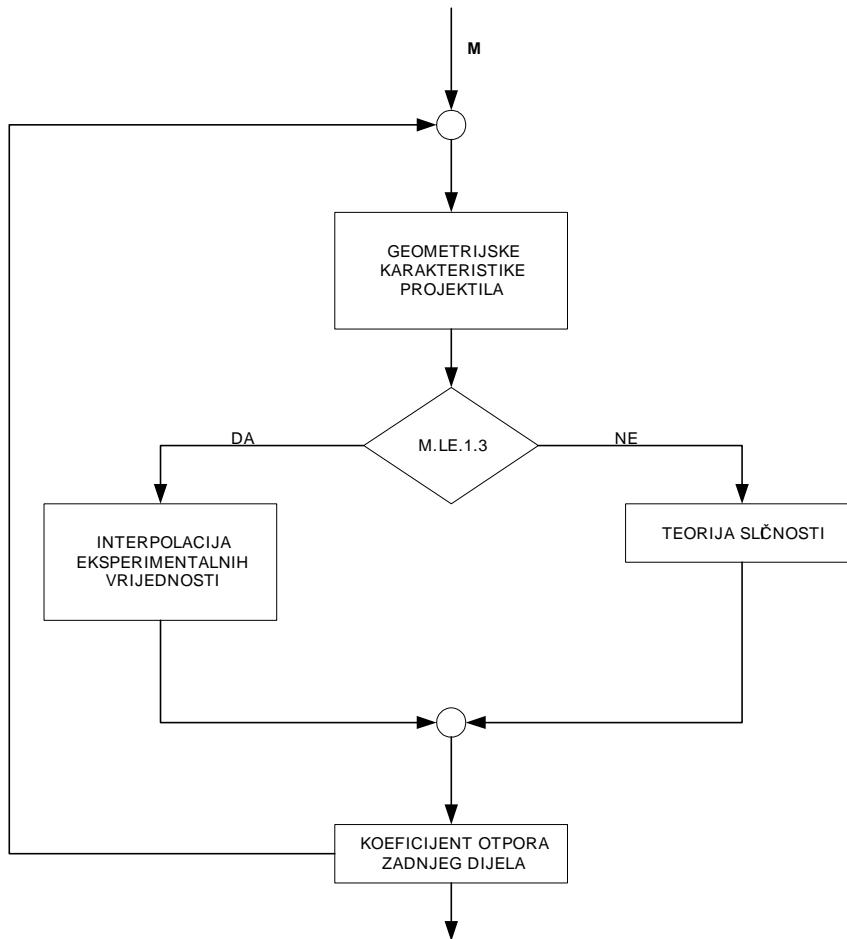
L_C - dužina cilindričnog dijela projektila u kalibrima

A_1 - faktor korekcije oblika prednjeg dijela za koeficijent otpora zadnjeg dijela pri supersoničnim brzinama



Slika 5.6: Korelacija koeficijenta otpora zadnjeg dijela sa parametrom sličnosti pri supersoničnim brzinama [16]

Naprijed navedena metodologija za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora zadnjeg dijela oblika konusa prikazana je dijagramom toka modula za određivanje koeficijenta otpora zadnjeg dijela (podprogram FCABT), slika 5.7.



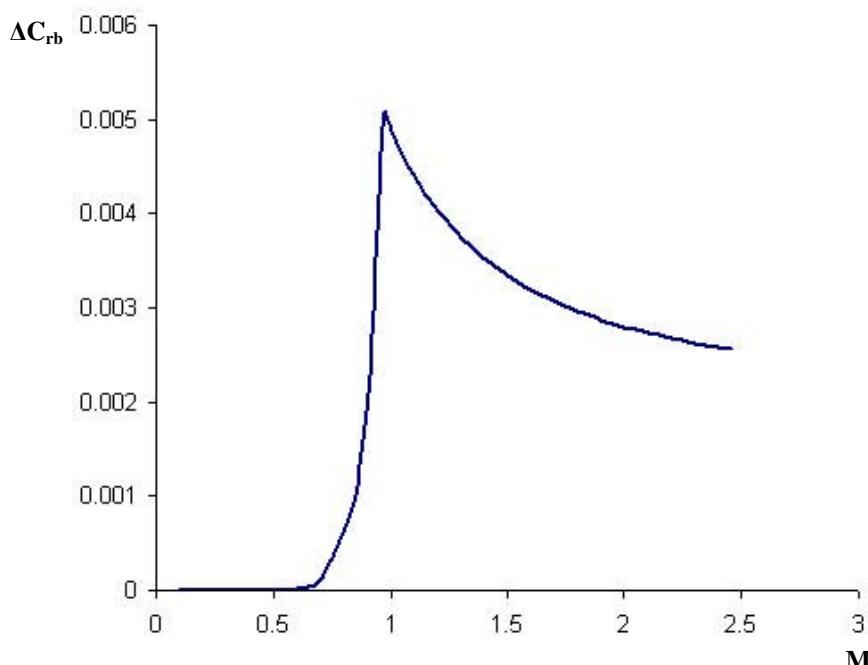
Slika 5.7: Dijagram toka modula za određivanje koeficijenta otpora zadnjeg dijela

5.1.4 Proračun otpora vodećeg prstena

Prisustvo vodećeg prstena na projektilu, u području transonike i supersonike, dovodi do pojave udarnih talasa kroz koje se svojstva strujanja i strujnica mijanjaju skokovito, diskontinuirano. Efekti vodećeg prstena na ukupan otpor, koji su dobiveni eksperimentalno u vazdušnom tunelu, su dati u literaturi [3].

Vodeći prsten korišten u ovim eksperimentima imao je srednju visinu od oko 0.024 kalibra. Pretpostavlja se da je vodeći prsten postavljen blizu zadnjeg kraja cilindričnog dijela projektila.

Na slici 5.8 dat je priraštaj aksijalne sile za visinu vodećeg prstena od 0.01 kalibar.



Slika 5.8: Priraštaj aksijalne sile za visinu vodećeg prstena od 0.01 kalibar [16]

Iako je udio koeficijenta otpora vodećeg prstena u ukupnom otporu mali, njegov uticaj je najznačajniji za Mach-ove brojeve koji odgovaraju transoničnom i supersoničnom području, pri čemu za niže transonične brzine koeficijent otpora vodećeg prstena raste do okolo zvučne brzine, za koju dostiže maksimum, a zatim lagano opada u području supersoničnih brzina.

Koeficijent otpora vodećeg prstena se može izračunati pomoću izraza:

$$C_{DRB} = \Delta C_{rb} \cdot \frac{d_{RB} - d}{0.02} \quad (5.5)$$

gdje su:

C_{DRB} - koeficijent otpora vodećeg prstena

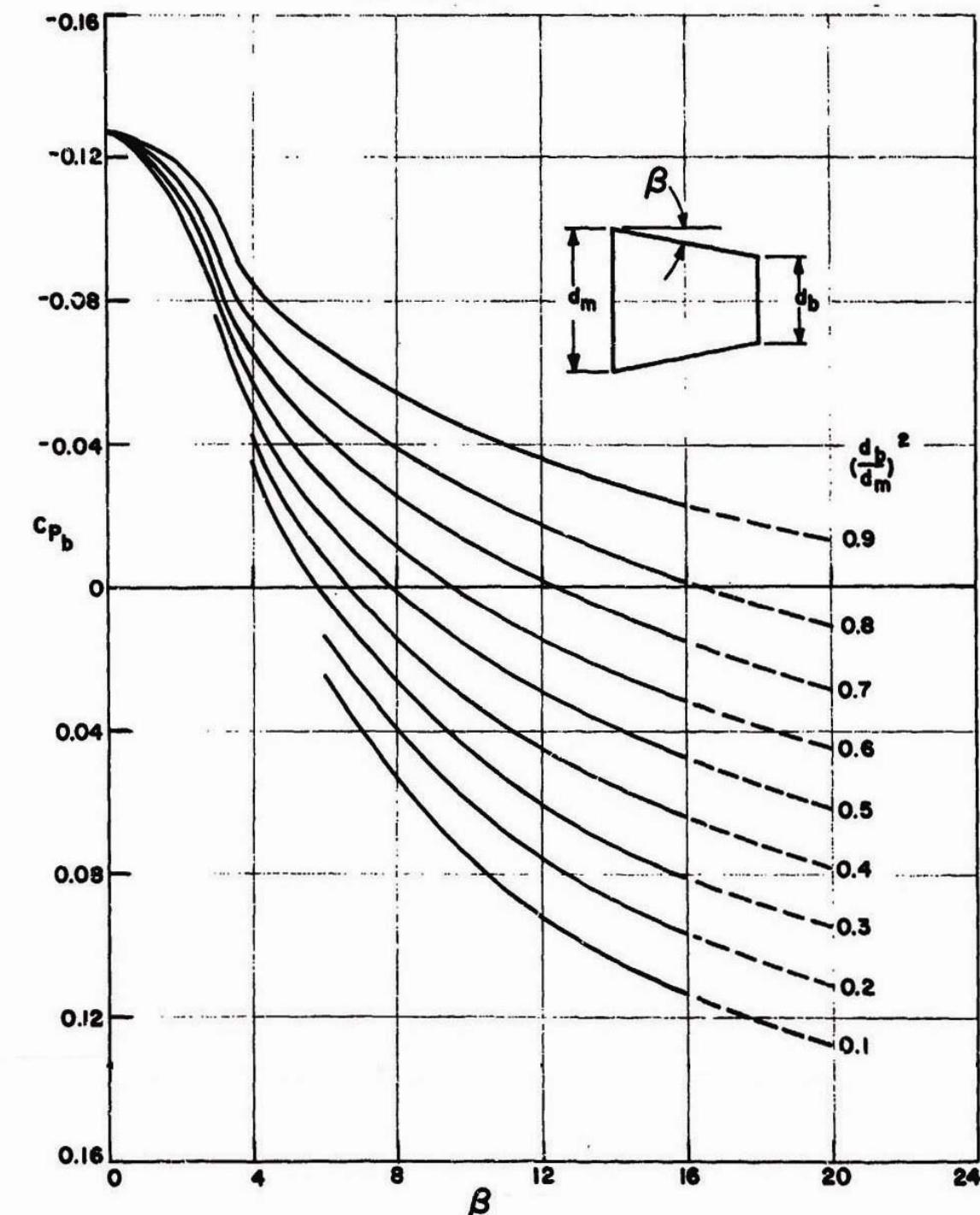
ΔC_{rb} - priraštaj aksijalne sile za vodeći prsten visine 0.01 kalibar

d_{RB} - prečnik vodećeg prstena

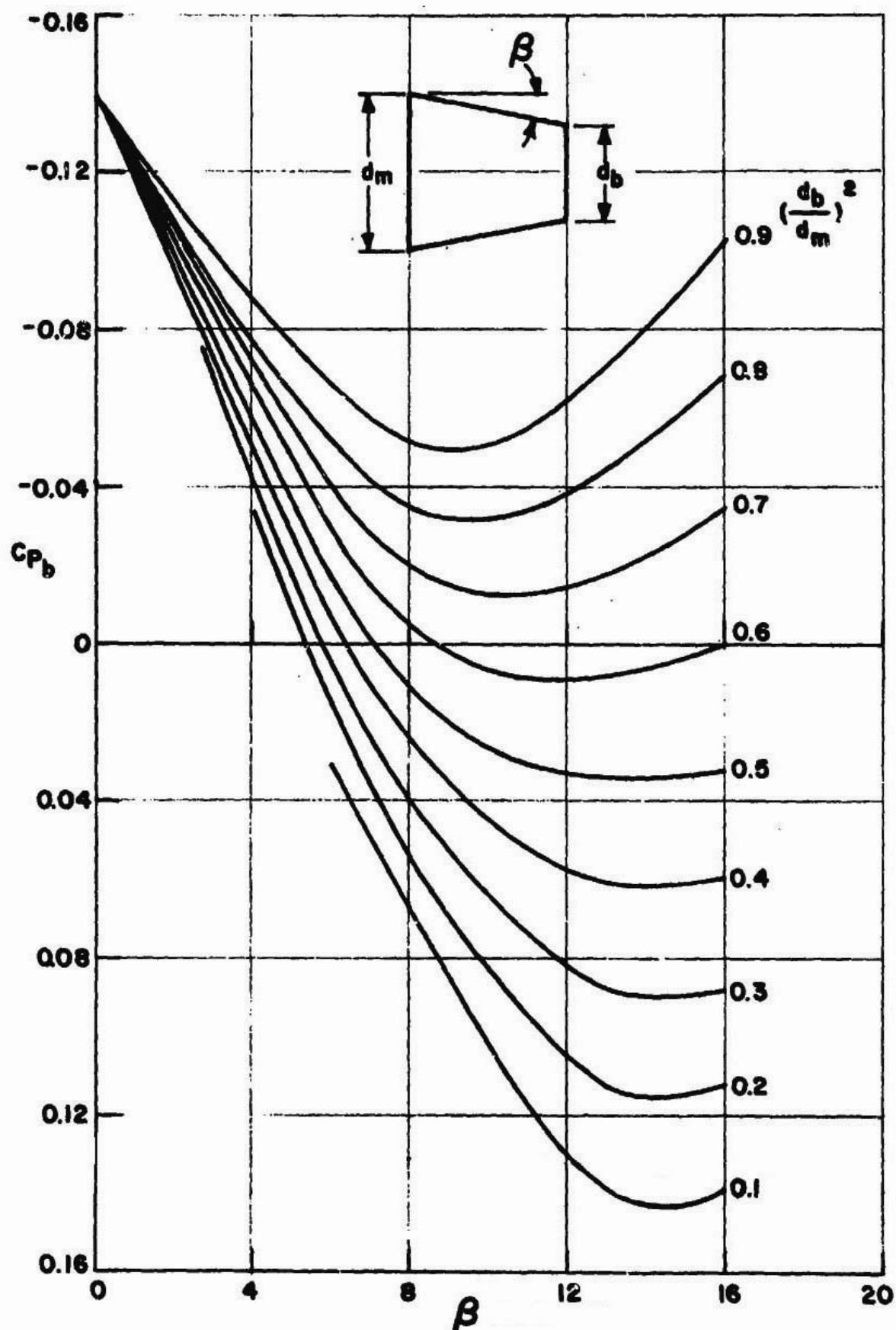
5.1.5 Proračun otpora dna

Koeficijent otpora dna C_{DB} nastaje uslijed zone niskog pritiska na dnu projektila. Upotreboom konusnog zadnjeg dijela može se smanjiti vrijednost C_{DB} , ali razrjeđenje talasa će voditi u povećanje otpora izraženog pomoću $C_{D\beta}$. Naravno, totalni efekat konusnog zadnjeg dijela će biti smanjenje C_{D0} .

Pri procjeni koeficijenta otpora dna u subsoničnom području koriste se dijagrami iz literature [2], određeni eksperimentalno, a koji daju zavisnost koeficijenta otpora dna u funkciji ugla konusa zadnjeg dijela (izraženog u stepenima) i odnosa (d_b/d_m)²,



Slika 5.9a: Koeficijent baznog pritiska za projektil sa konusnim zadnjim dijelom pri $M = 0.6$ [2]



Slika 5.9b: Koeficijent baznog pritiska za projektil sa konusnim zadnjim dijelom pri $M = 0.8$ [2]

Ukoliko je ugao nagiba zadnjeg konusa veći od 16° , za koeficijent otpora dna upotrebljava se empirijska zavisnost (3.32) [11]:

$$C_{DB} = \frac{0.029}{\sqrt{C_{DSF}}} \cdot \left(\frac{d_B}{d} \right)^3$$

Za područje transoničnih i supersoničnih brzina korištena je empirijska formula (4.39):

$$C_{DB} = -C_{pB} \cdot \left(\frac{d_B}{d} \right)^3$$

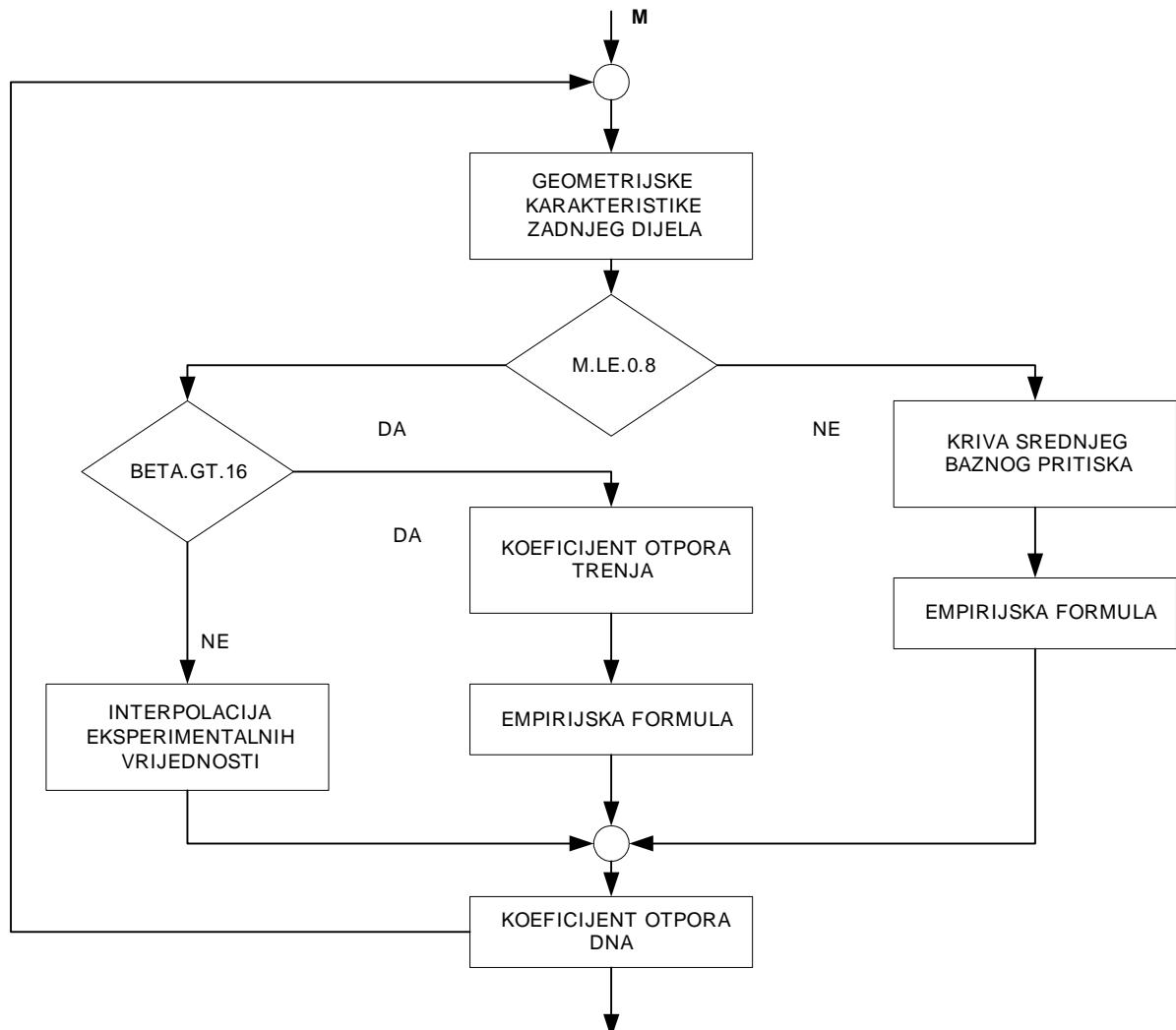
pri čemu je:

C_{DB} - koeficijent otpora dna projektila

C_{pB} - srednji bazni pritisak za cilindar (slika 3.13)

d_B - prečnik baze (dma) projektila

Navedena metodologija za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora dna prikazana je dijagrom toku na slici 5.9, pri čemu je opisan redoslijed i međusobni odnosi potrebnih operacija s ciljem automatizacije postupka, povećanja brzine rada i tačnosti, itd.



Slika 5.9: Dijagram toka modula za određivanje otpora dna

5.1.6 Predviđanje otpora trenja projektila

Otpor trenja, koji se javlja na omotaču projektila, nastaje kao posljedica viskoznosti vazduha, odnosno sposobnosti vazduha da se suprostavlja klizanju jednog sloja u odnosu na drugi. Viskozni otpor ili otpor trenja je teško predvidjeti ili izmjeriti, zbog nemogućnosti da se tačno odredi gdje granični sloj prelazi iz laminarnog u turbulentni tokom leta (tačka prelaza). Položaj tačke prelaza zavisi od Reynolds-ovog broja, Mach-ovog broja, raspodjеле pritiska, nivoa turbulencije, brzine prenosa topote, hrapavosti površine i drugih faktora koji nisu u potpunosti razjašnjeni.

Koeficijent aksijalne sile uslijed trenja [11] se određuje pomoću relacije:

$$C_{DSF} = c_{Af} \cdot \frac{S_{wet}}{S_{ref}}$$

pri čemu je:

C_{DSF} - koeficijent otpora trenja projektila

c_{Af} - koeficijent otpora trenja za glatku ravnu ploču

S_{wet} - površina omotača projektila

S_{ref} - referentna površina (površina kruga prečnika kalibra)

Za laminarni granični sloj, Blasius-ova formula (3.27), sa korekcijom za efekte kompresibilnosti, [16] je:

$$c_{Afl} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \cdot (1 + 0.12M^2)^{-0.12}$$

Za turbulentni granični sloj, koeficijent aksijalne sile uslijed trenja se računa pomoću Karman-a sa korekcijom od Martinov-a [10] (4.7.):

$$c_{Aft} = \frac{3.91}{(\ln Re)^{2.58} \left(1 + \frac{M^2}{15}\right)^{0.85}}$$

gdje su:

c_{Afl} - koeficijent trenja za laminarni granični sloj

c_{Aft} - koeficijent trenja za turbulentni granični sloj

Re - Reynolds-ov broj baziran na dužini projektila

Reyolds-ov broj baziran na dužini projektila je:

$$Re = \frac{V \cdot L}{v}$$

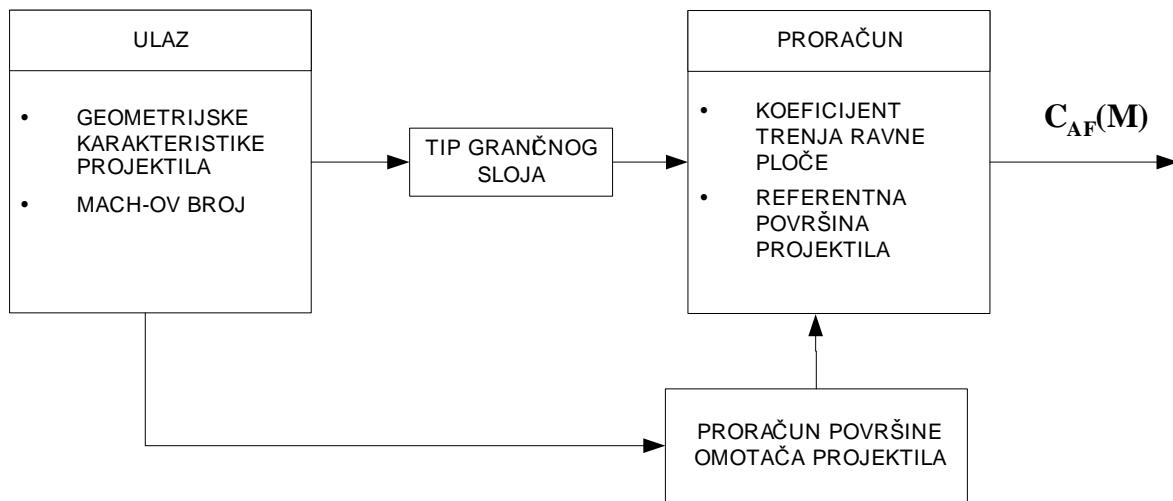
pri čemu je:

V - brzina slobodnog toka

L - dužina projektila

v - kinematska viskoznost

Na slici 5.10 prikazan je dijagram toka modula za određivanje koeficijenta otpora trenja projektila u kojem se kao prva aproksimacija koristi koeficijent trenja ravne ploče.



Slika 5.10: Dijagram toka modula za određivanje koeficijenta otpora trenja projektila

5.2 Testiranje

Za testiranje modela predviđanja sile otpora pri kretanju projektila pod nultim napadnim uglom odabранo je pet projektila, po jedan malog i srednjeg kalibra i tri velikog kalibra, koji se, između ostalog, razlikuju po obliku projektila i složenosti prednjeg dijela.

Razmatrani su:

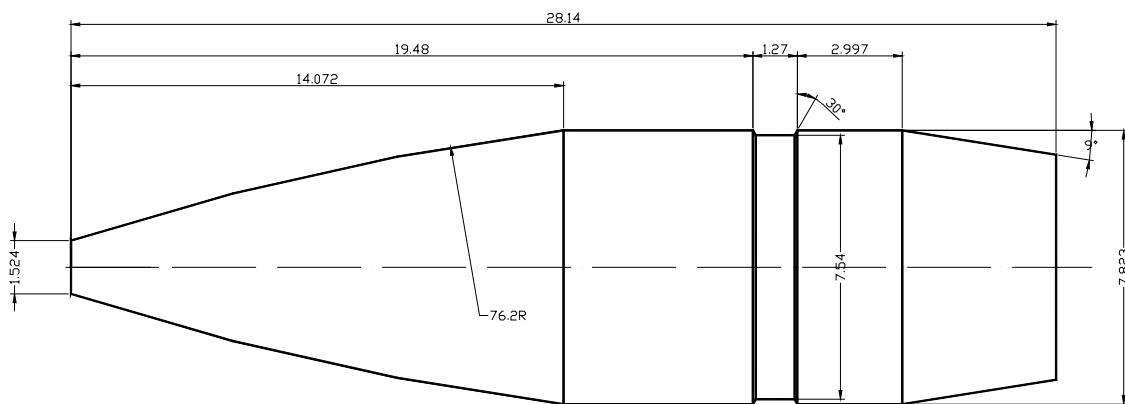
- Projektil malog kalibra,
 - 7.62 mm M80
- Projektil srednjeg kalibra,
 - 30 mm M789
- Projektili velikog kalibra:
 - 105 mm M1
 - 155 mm M483A1
 - 155 mm M549

5.2.1 Projektil 7.62 mm M80 – mali kalibar



Slika 5.11: Municija 7.62 mm M80

Projektil 7.62 mm M80, prikazan na slici 5.11 spada u projektile malog kalibra kod kojeg je prednji dio oblika sekantnog oživila, vitkosti oko 2, a zadnji dio ima oblik konusa. Referentni dijametar je 7.62 mm, a ukupna dužina projektila iznosi 28.14 mm. Radijus oživila je 76.2 mm, a prečnik zatupljenja vrha iznosi 1.52 mm. Zadnji konus je dužine 4.39 mm i ugla konusa 9° . Ovaj projektil nema vodeći prsten.



Slika 5.11a: Geometrijske karakteristike projektila 7.62 mm M80

Ulagana i izlagana datoteka za ovaj projektil date su na slikama 5.11b i 5.11c.

mpaq Visual Fortran - [CONFIG.dat]

Build Tools Window Help

XPC

```

1. 0.0076232          DRB
0.001524,0.           DS, LS
0.001524, 0., 0., 0.  DF, LF, KF, FU
2.0816,0.0140716,13.1234,0.00908  FN, LO, KO, DP
0.0076232,0.009677  D, LC
0.00643,0.004394    DB, LA
0.547                XV
19,
0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 2.0, 2.2, 2.5, 3.,
7.62mm M80

```

Slika 5.11b: Ulagana datoteka CONFIG.DAT programa OTPOR za projektil 7.62 mm M80

mpaq Visual Fortran - [AERO.TAB]

: Build Tools Window Help

XPC

OTPOR

```

DS=0.002  LS=0.000
DF=0.002  LF=0.000  1/RF=0.000  FU=0.000
FN=2.082  LO=0.014  1/RO= 13.1234
D =0.008  LC=0.010
DRB =0.008
DB=0.006  LA=0.004
LB=0.028

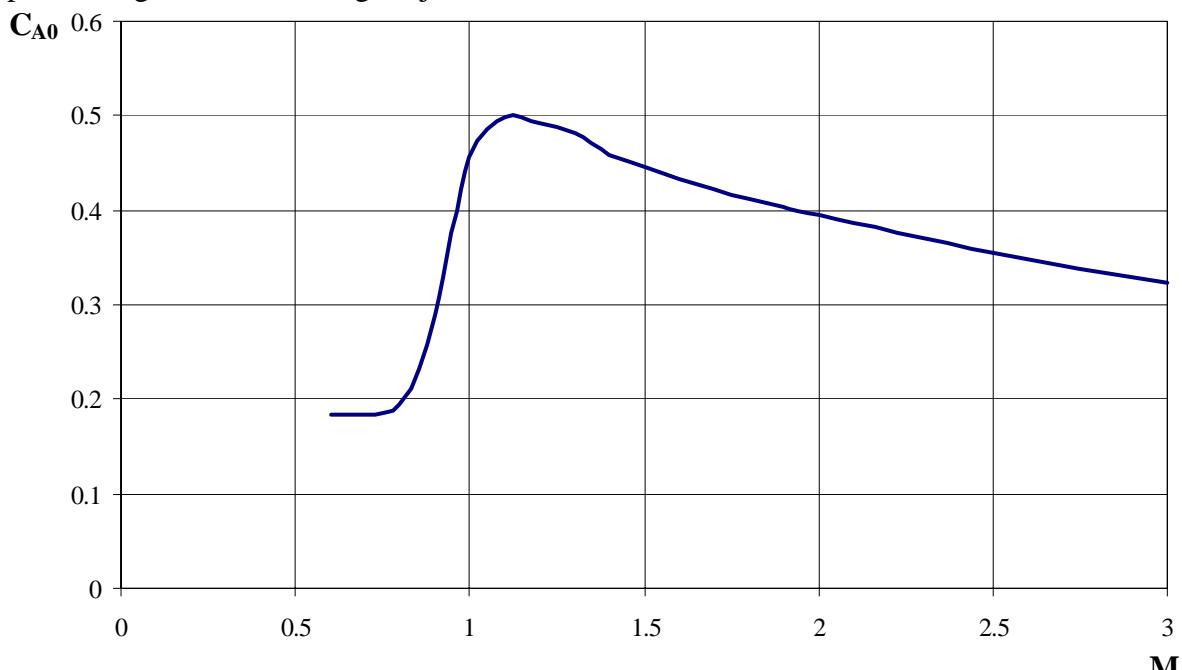
PE=12.19

```

MA	CA0	CAN	CAA	CAF	CAB	CARB
0.400	0.180	0.0323	0.0389	0.0697	0.0396	0.0000
0.500	0.178	0.0322	0.0389	0.0663	0.0406	0.0000
0.600	0.186	0.0417	0.0389	0.0636	0.0414	0.0000
0.700	0.191	0.0487	0.0385	0.0614	0.0421	0.0000
0.800	0.204	0.0597	0.0417	0.0595	0.0428	0.0000
0.900	0.290	0.1042	0.0550	0.0577	0.0734	0.0000
1.000	0.456	0.1942	0.0919	0.0561	0.1140	0.0000
1.100	0.496	0.2451	0.0833	0.0547	0.1132	0.0000
1.200	0.491	0.2492	0.0765	0.0533	0.1120	0.0000
1.300	0.480	0.2453	0.0722	0.0520	0.1104	0.0000
1.400	0.456	0.2309	0.0663	0.0508	0.1083	0.0000
1.500	0.443	0.2264	0.0614	0.0496	0.1057	0.0000
1.600	0.431	0.2227	0.0570	0.0484	0.1028	0.0000
1.700	0.421	0.2205	0.0530	0.0473	0.0996	0.0000
1.800	0.411	0.2186	0.0496	0.0463	0.0961	0.0000
2.000	0.393	0.2165	0.0437	0.0442	0.0887	0.0000
2.200	0.376	0.2131	0.0390	0.0423	0.0812	0.0000
2.500	0.353	0.2089	0.0333	0.0396	0.0708	0.0000
3.000	0.323	0.2032	0.0264	0.0356	0.0573	0.0000

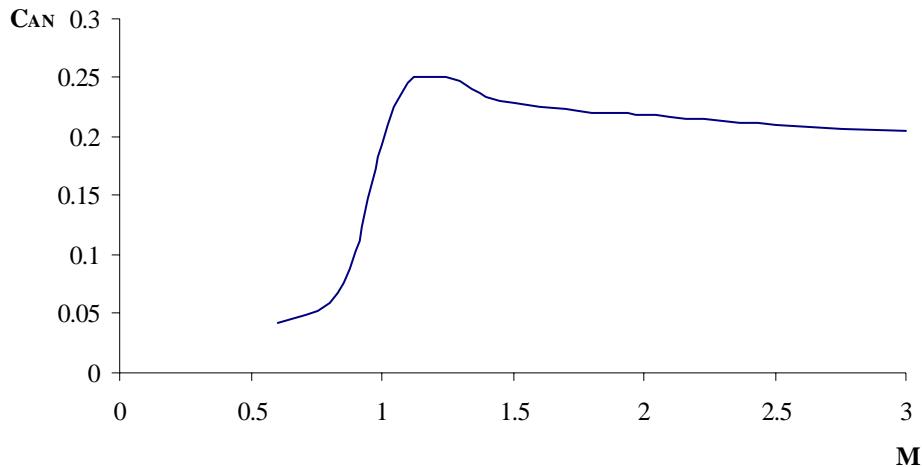
Slika 5.11c: Izlazna datoteka AERO.TAB programa OTPOR za projektil 7.62 mm M80

Na dijagramu 5.11d je prikazana zavisnost aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu od Mach-ovog broja.

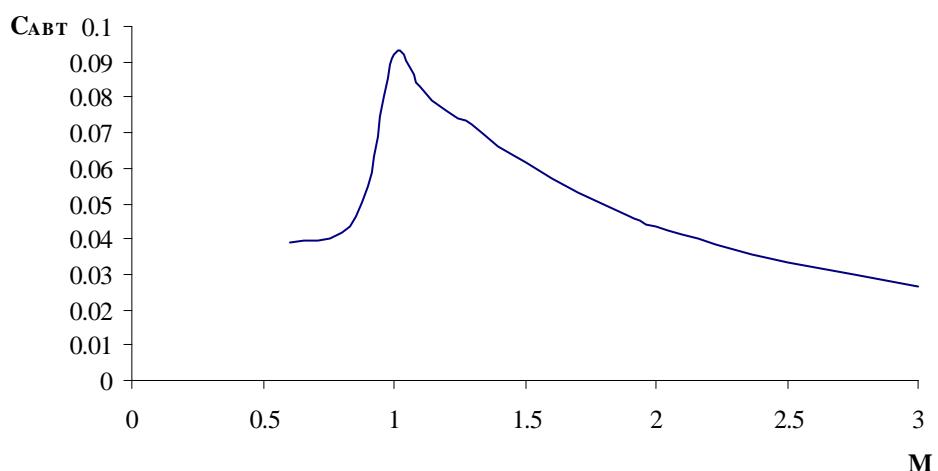


Slika 5.11d: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80

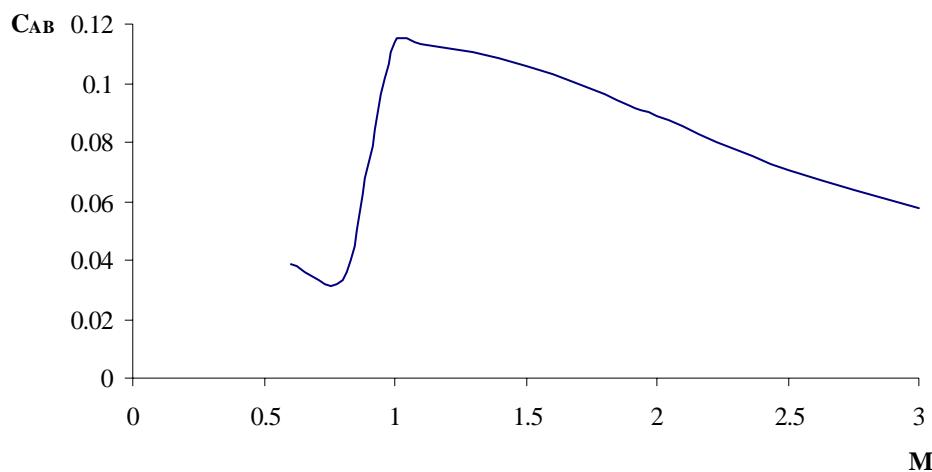
Na slikama 5.11e – 5.11h prikazane su komponente koeficijenta otpora (koeficijent otpora prednjeg dijela, koeficijent otpora zadnjeg dijela, koeficijent otpora dna i koeficijent otpora trenja).



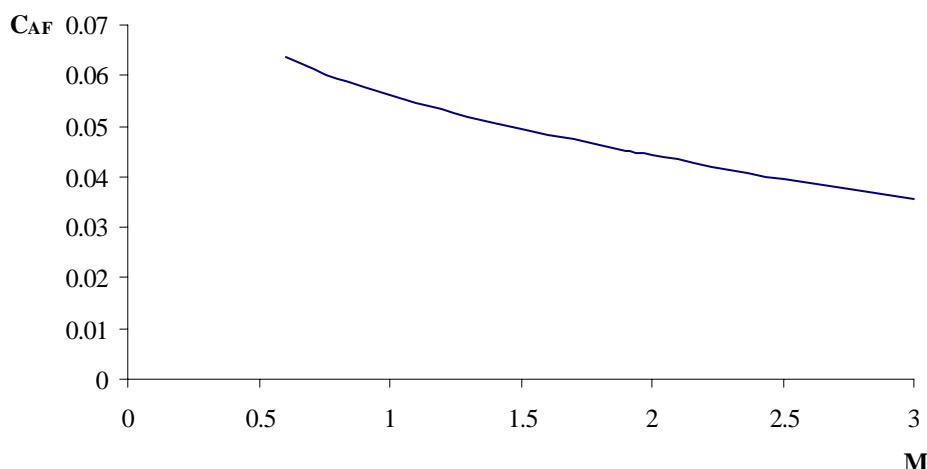
Slika 5.11e: Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80



Slika 5.11f: Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80



Slika 5.11g: Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80



Slika 5.11h: Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 7.62 mm M80

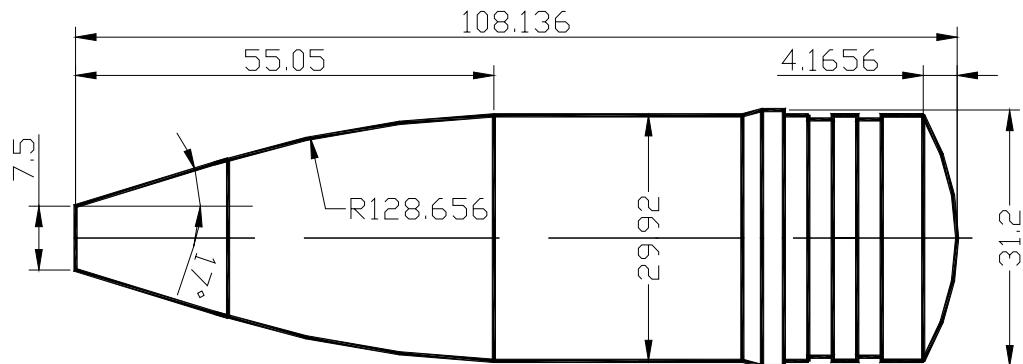
5.2.2 Projektil 30 mm M789 – srednji kalibar

Za projektil srednjeg kalibra izabran je projektil 30 mm M789 čije su aerodinamičke karakteristike date u literaturi [7], a nalazi se i u bazi podataka ARROW TECH-a.



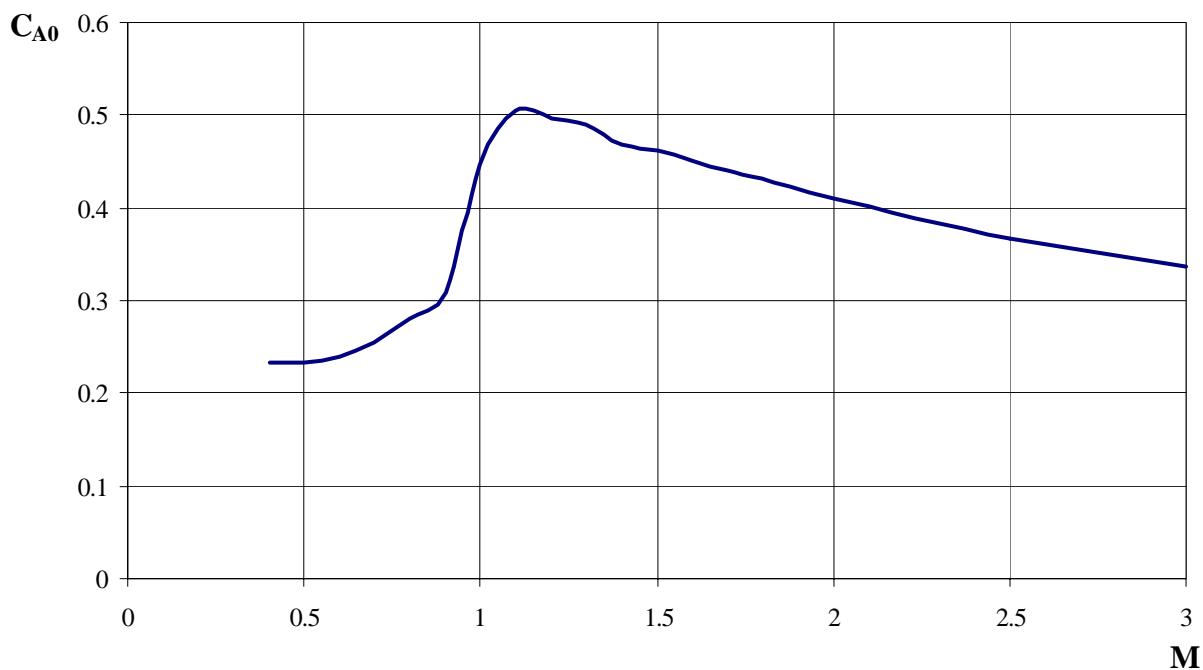
Slika 5.12: Municija 30 mm M789

Na slici 5.12a prikazane su dimenzije ovog projektila, kod kojeg se složeni prednji dio sastoji od konusa i tangentnog oživila. Projektil posjeduje vodeći prsten, ali nema zadnji dio, a dno mu je zaobljeno.



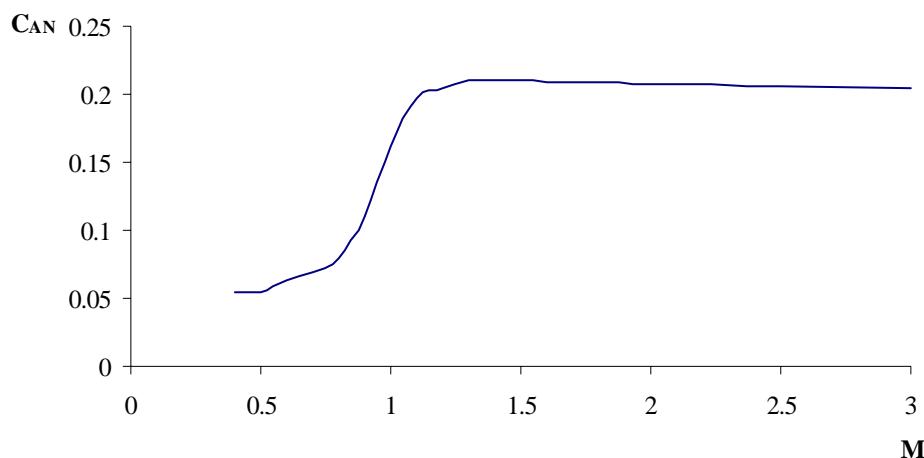
Slika 5.12a: Geometrijske karakteristike projektila 30 mm M789

Na dijagramu 5.12b je prikazana zavisnost aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu od Mach-ovog broja.

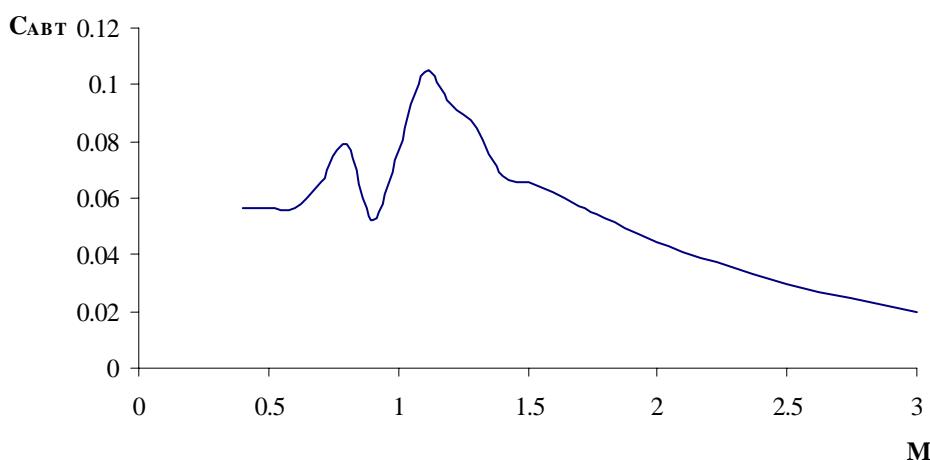


Slika 5.12b: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789

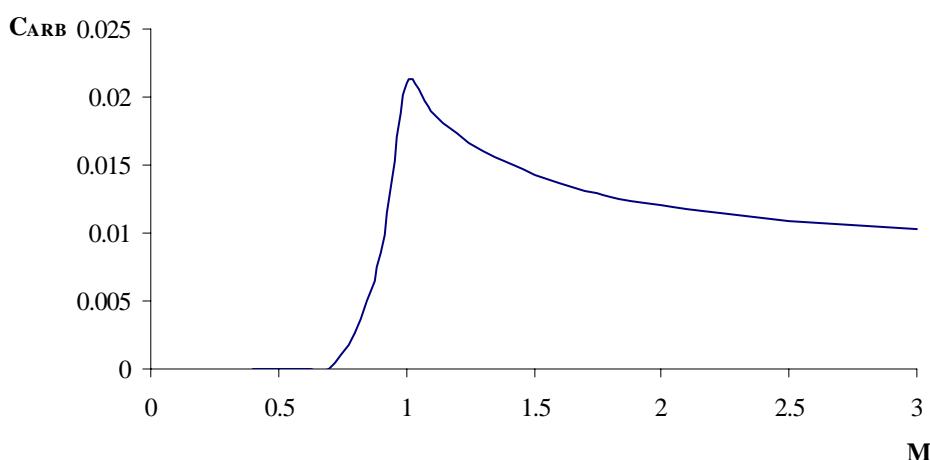
Komponente koeficijenta otpora (koeficijent otpora prednjeg dijela, koeficijent otpora zadnjeg dijela, koeficijent otpora vodećeg prstena, koeficijent otpora dna i koeficijent otpora trenja) u funkciji Mach-ovog broja prikazane su na slikama 5.12c - 5.12g. Kako projektil nema zadnji konus, nego zaobljeno dno, pri predviđanju je pretpostavljen kratki konus malog ugla nagiba.



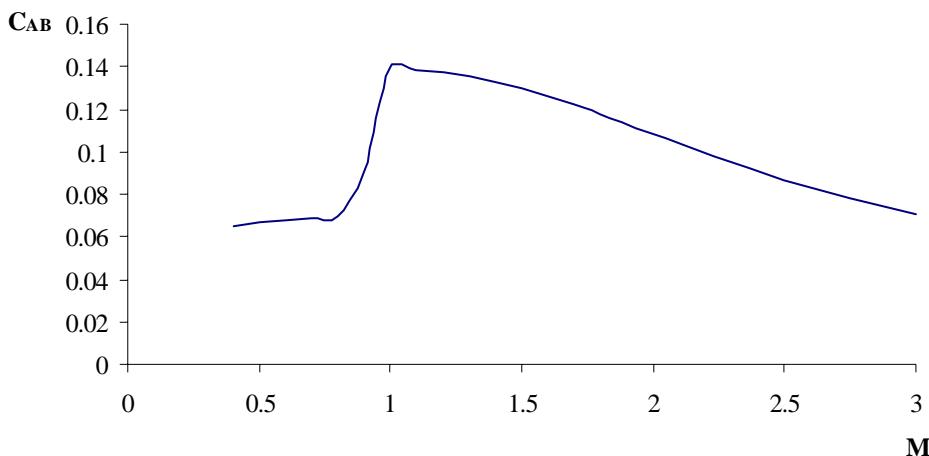
Slika 5.12c: Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789



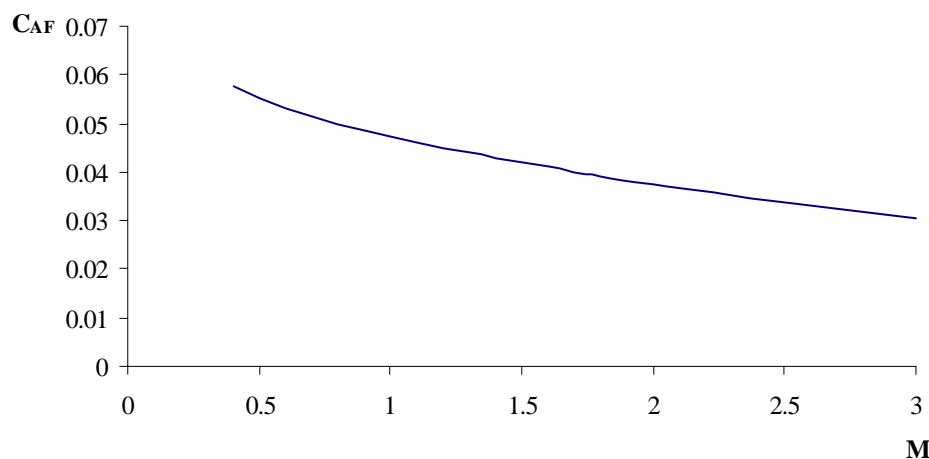
Slika 5.12d: Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789



Slika 5.12e: Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789



Slika 5.12f: Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789



Slika 5.12g: Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 30 mm M789

5.2.3 Projektili velikog kalibara

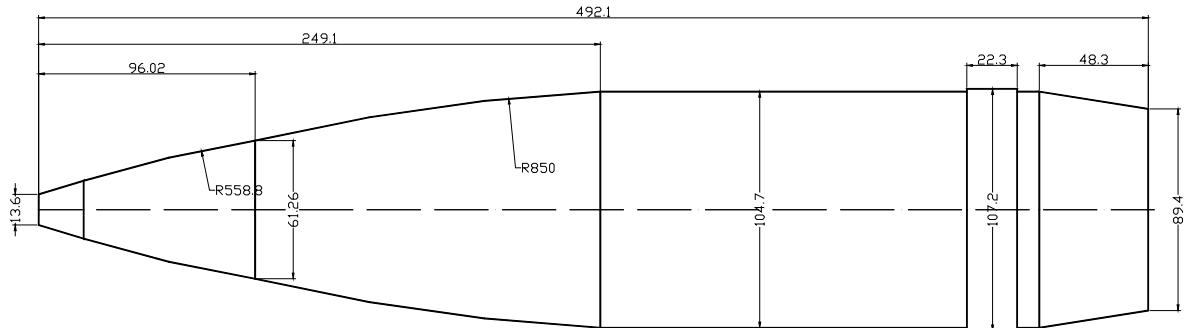
Posljednji primjeri odnose se na projektile velikog kalibra, projektil 105 mm M1 (slika 5.13) i projektil 155 mm M549 (slika 5.15) za koje su referentne vrijednosti uzete iz dostupne baze podataka ARROW TECH-a, a za projektil 155 mm M483A1 (slika 5.14) vrijednosti koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu date su u literaturi [6].

5.2.3.1 Projektil 105 mm M1



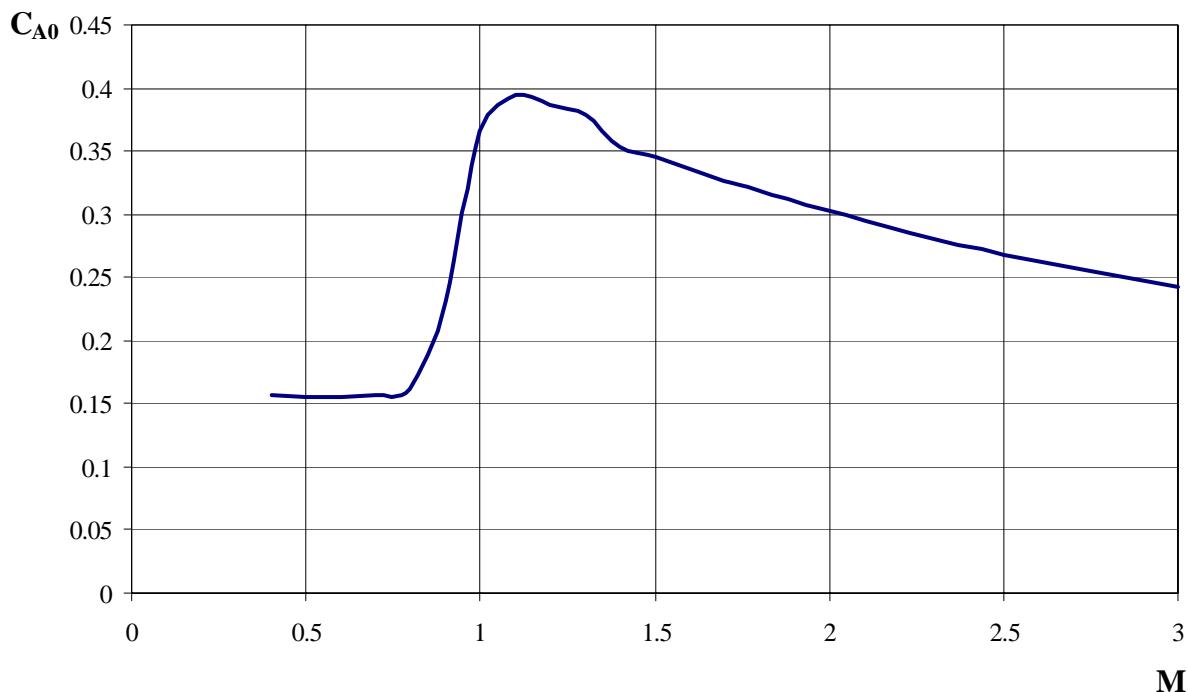
Slika 5.13: Municija 105 mm M1

Projektil 105 mm M1, (slika 5.13a), referentnog prečnika 104.7 mm, ima prednji dio oblika sekantnog oživila, radijusa 850 mm, sa upaljačem PD M557 oživalnog oblika, dužine 96 mm i prečnika zatupljenja 13.59 mm. Zadnji dio projektila je oblika konusa dužine 48.3 mm i prečnika dna 89.4 mm. Vodeći prsten se nalazi pri kraju cilindričnog dijela i ima prečnik 107.2 mm. Ukupna dužina projektila je 492.1 mm.



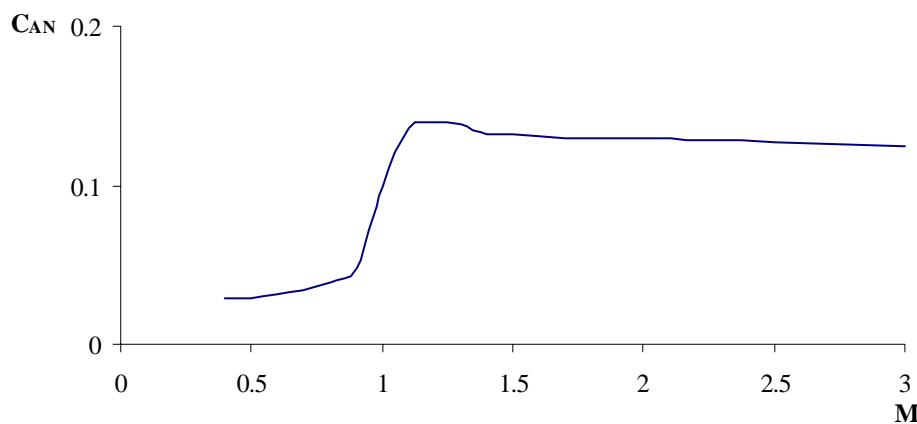
Slika 5.13a: Geometrijske karakteristike projektila 105 mm M1

Zavisnost aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu od Mach-ovog broja prikazana je slikom 5.13b.

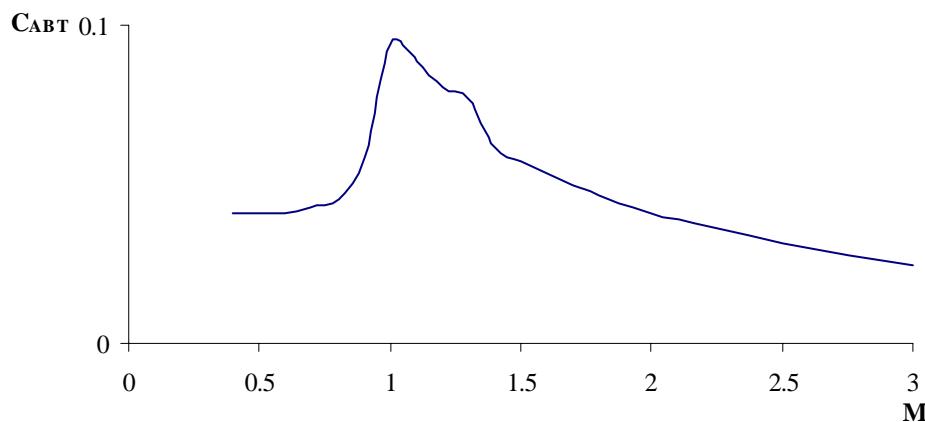


Slika 5.13b: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1

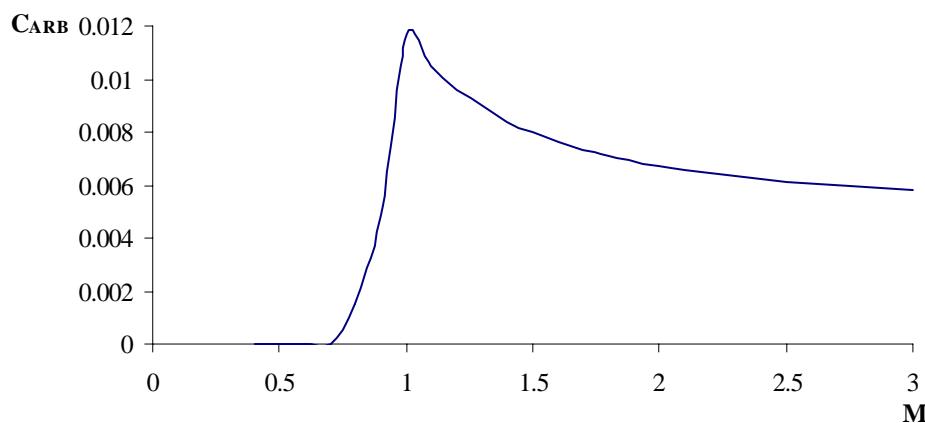
Komponente koeficijenta otpora (koeficijent otpora prednjeg dijela, koeficijent otpora zadnjeg dijela, koeficijent otpora vodećeg prstena, koeficijent otpora dna i koeficijent otpora trenja) u funkciji Mach-ovog broja prikazane su na slikama 5.13c - 5.13g.



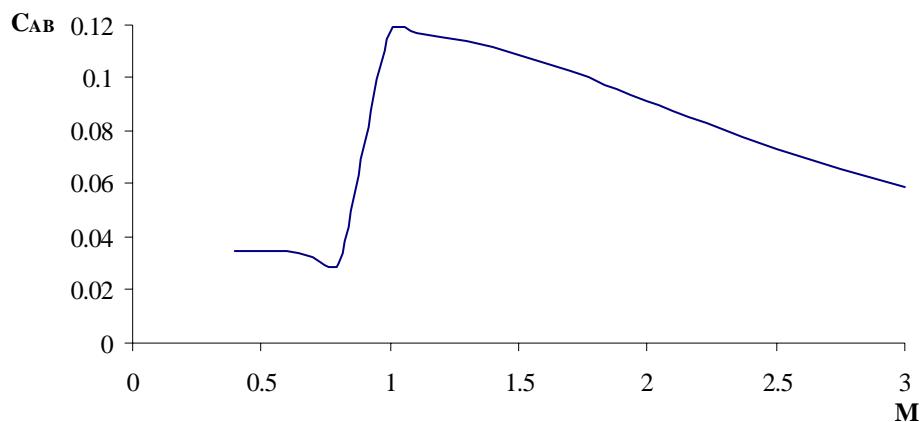
Slika 5.13c: Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1



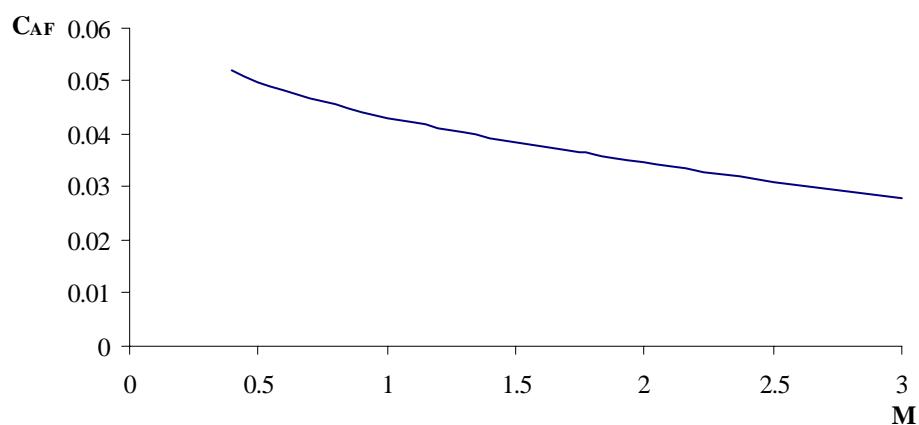
Slika 5.13d: Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1



Slika 5.13e: Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1



Slika 5.13f: Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1



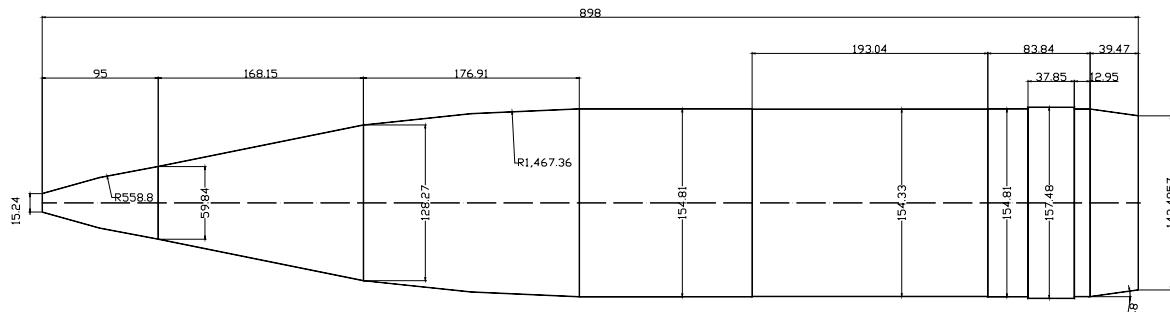
Slika 5.13g: Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 105 mm M1

5.2.3.2 Projektil 155 mm M483A1



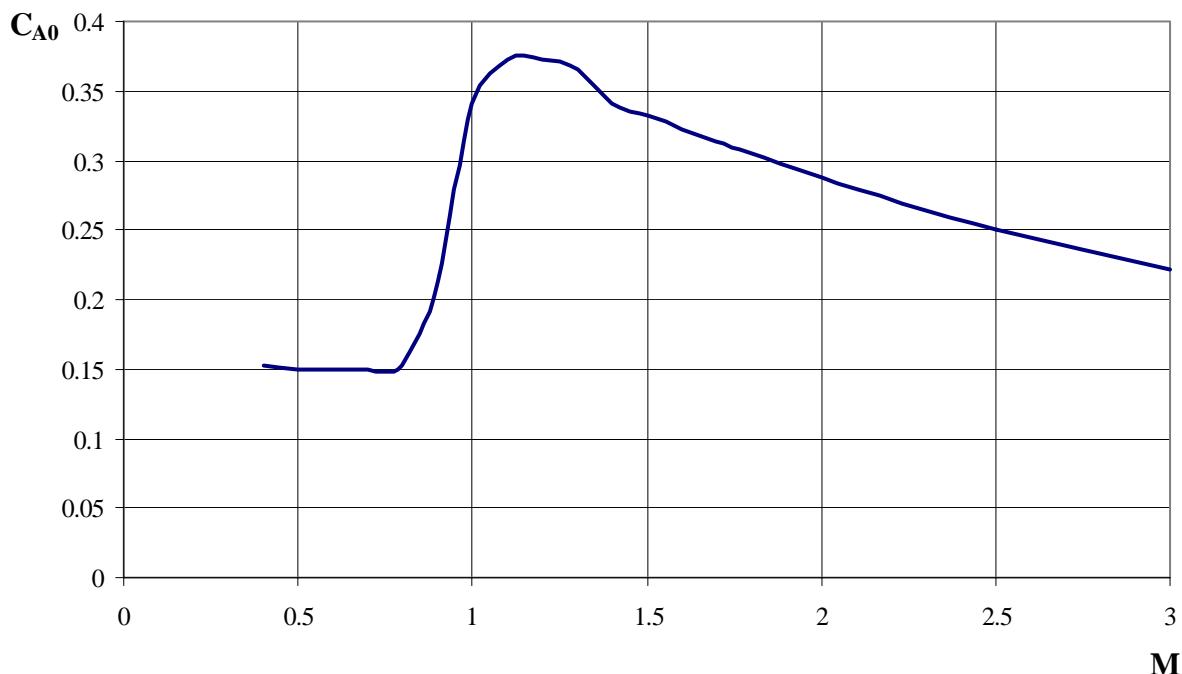
Slika 5.14: Projektil 155 mm M483A1

Referentni dijametar je 154.81 mm, a ukupna dužina 898 mm. Prednji dio je složenog oblika, sastoji se od upaljača, dužine 95 mm i prečnika baze 59.84 mm, oblika sekantnog oživila, radiusa oživila upaljača 558.8 mm, adaptera konusnog oblika, dužine 168.15 mm i prečnika baze 128.27 mm, i sekantnog oživila, dužine 176.91 mm i radijusa oživila 1467.36 mm. Zadnji dio je oblika konusa dužine 39.47 mm i prečnika dna 143.7 mm. Vodeći prsten je prečnika 157.48 mm. Prečnik zatupljenja vrha projektila je 15.24 mm.



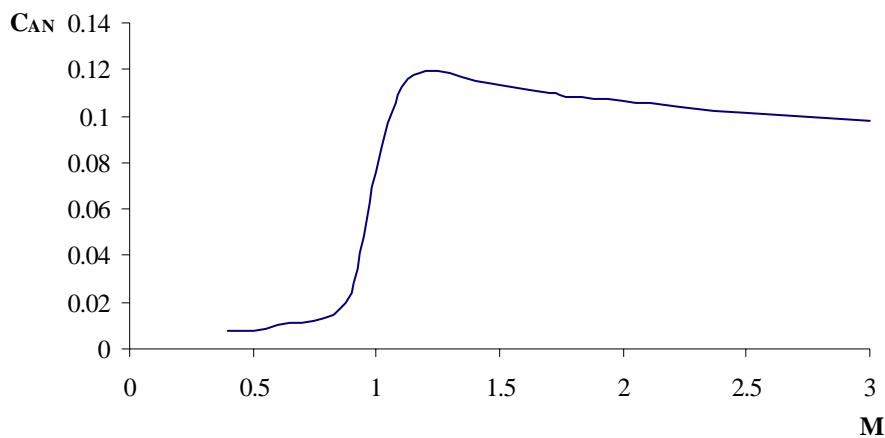
Slika 5.14a: Geometrijske karakteristike projektila 155 mm M483A1

Zavisnost aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu od Mach-ovog broja prikazana je slikom 5.14b.

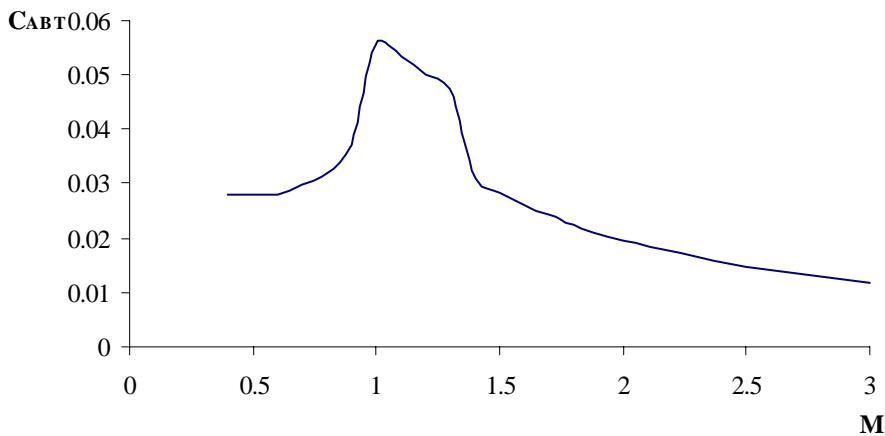


Slika 5.14b: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1

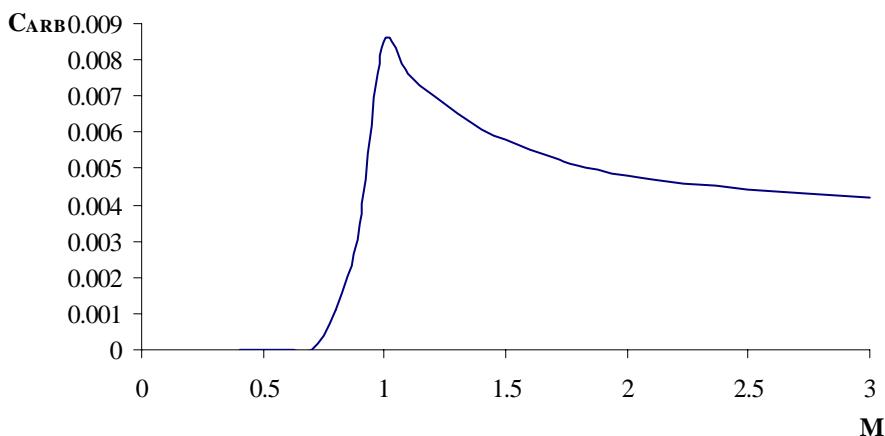
Komponente koeficijenta otpora (koeficijent otpora prednjeg dijela, koeficijent otpora zadnjeg dijela, koeficijent otpora vodećeg prstena, koeficijent otpora dna i koeficijent otpora trenja) u funkciji Mach-ovog broja prikazane su na slikama 5.14c - 5.14g.



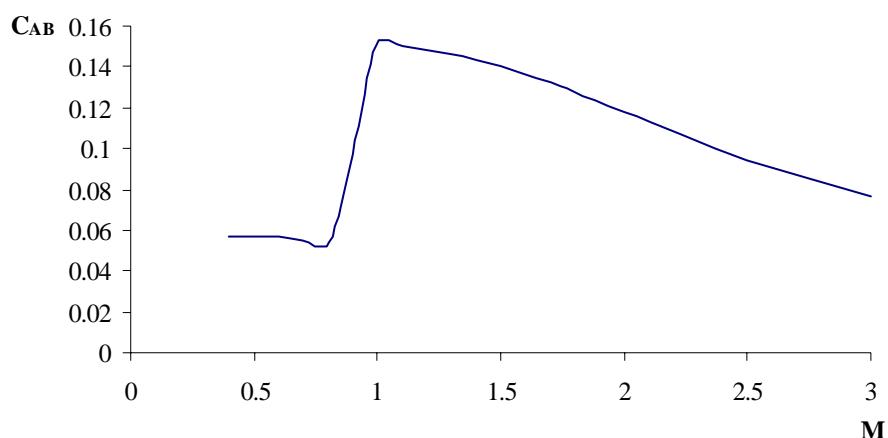
Slika 5.14c: Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1



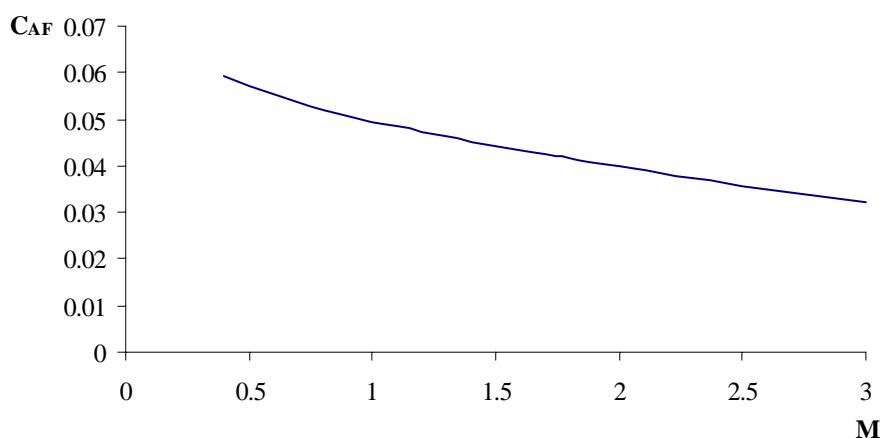
Slika 5.14d: Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1



Slika 5.14e: Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1

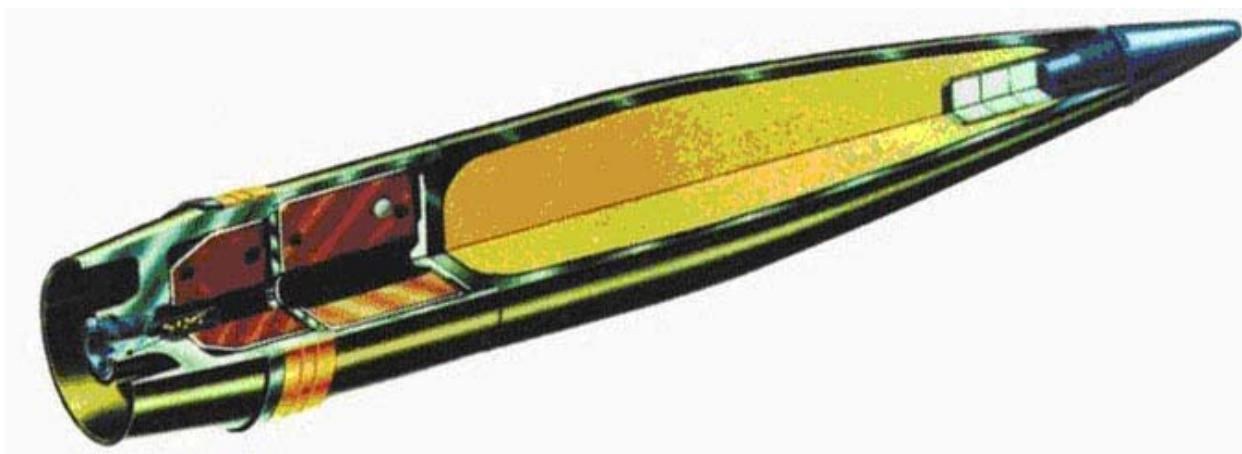


Slika 5.14f: Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1



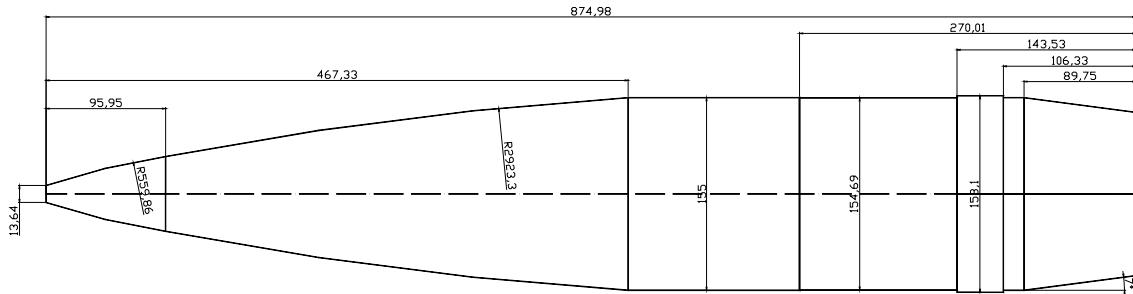
Slika 5.14g: Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M483A1

5.2.3.3 Projektil 155 mm M549



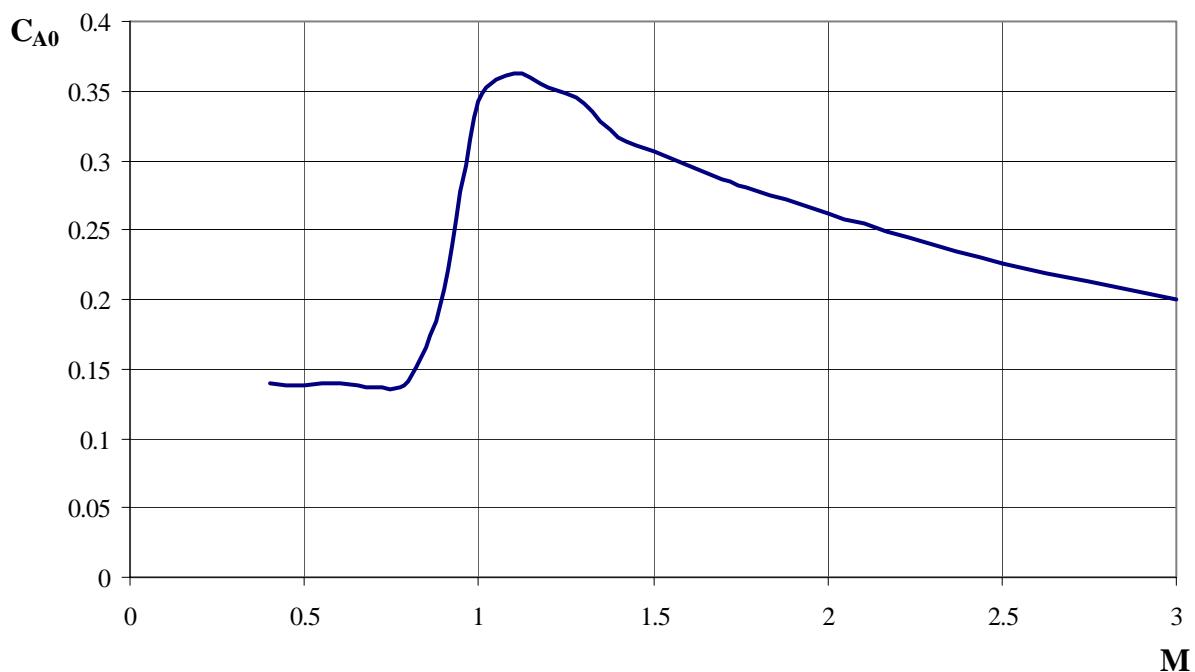
Slika 5.15: Projektil 155 mm M549

Referentni dijametar je 155mm, ukupna dužina je 875 mm. Prednji dio je složenog oblika, sastoji se od upaljača, dužine 95.94 mm i prečnika baze 61.34 mm, oblika sekantnog oživila, radijusa oživila upaljača 559.86 mm, i sekantnog oživila, dužine 370.89 mm i radijusa oživila 2923.3 mm. Zadnji dio je oblika konusa dužine 89.7 mm i prečnika dna 131.4 mm. Vodeći prsten je prečnika 157.5 mm. Prečnik zatupljenja vrha projektila je 13.64 mm.



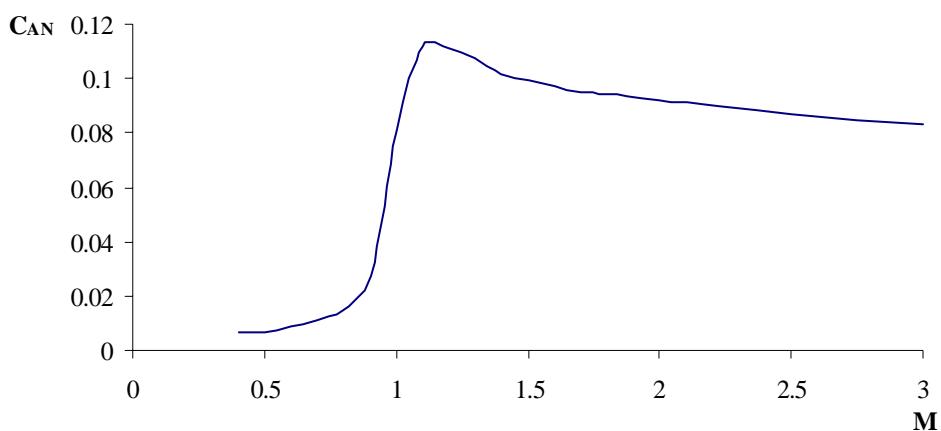
Slika 5.15a: Geometrijske karakteristike projektila 155 mm M549

Zavisnost aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu od Mach-ovog broja prikazana je slikom 5.15b.

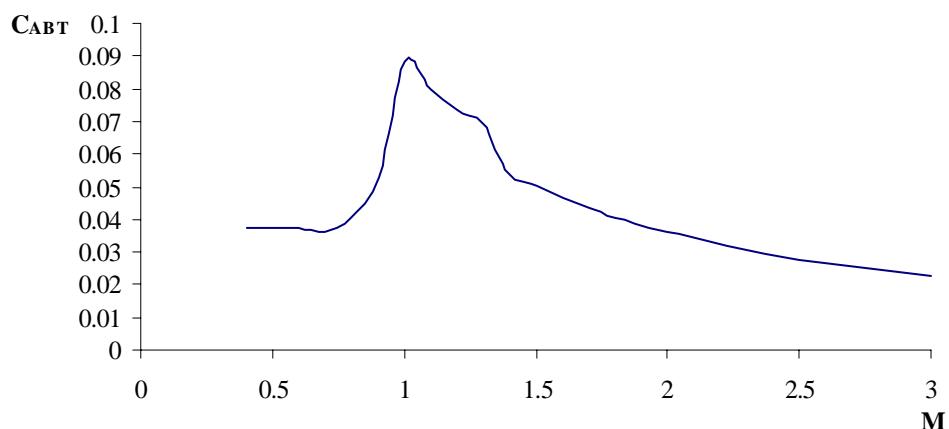


Slika 5.15b: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549

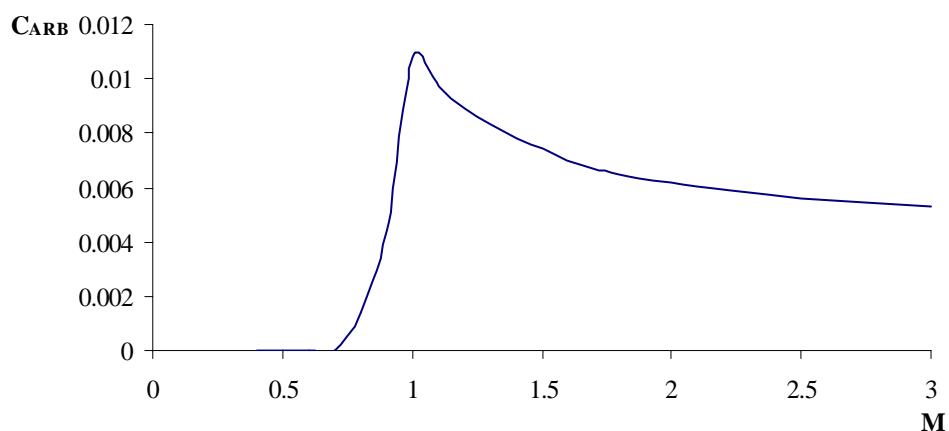
Komponente koeficijenta otpora (koeficijent otpora prednjeg dijela, koeficijent otpora zadnjeg dijela, koeficijent otpora vodećeg prstena, koeficijent otpora dna i koeficijent otpora trenja) u funkciji Mach-ovog broja prikazane su na slikama 5.15c - 5.15g.



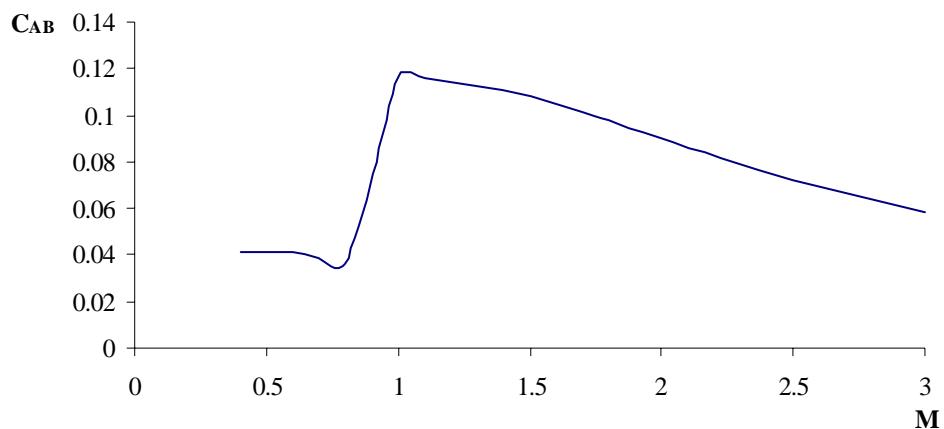
Slika 5.15c: Koeficijent otpora prednjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549



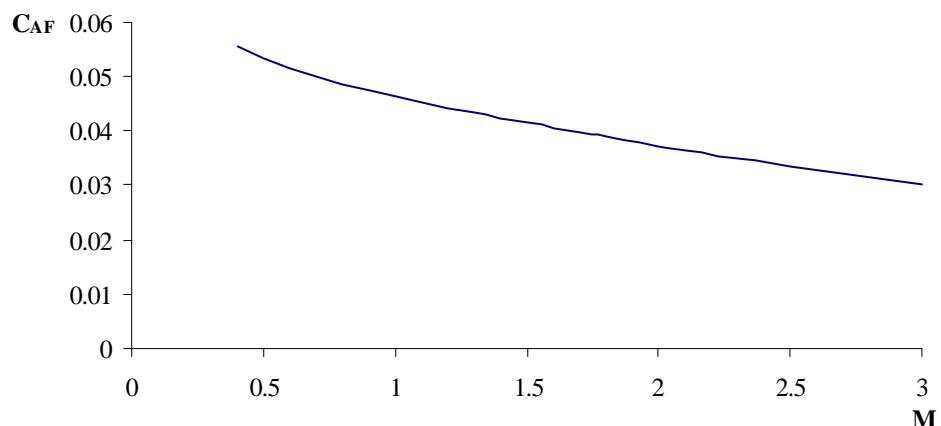
Slika 5.15d: Koeficijent otpora zadnjeg dijela u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549



Slika 5.15e: Koeficijent otpora vodećeg prstena u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549



Slika 5.15f: Koeficijent otpora dna u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549



Slika 5.15g: Koeficijent otpora trenja u funkciji Mach-ovog broja za projektil 155 mm M549

6. Diskusija

Odstupanja koja se, uobičajeno, javljaju pri proračunu aksijalne sile pri nultom napadnom uglu iznose $\pm 3\%$ pri supersoničnim brzinama, $\pm 11\%$ pri transoničnim brzinama i $\pm 6\%$ pri subsoničnim brzinama [16].

U cilju procjene mogućnosti modela OTPOR, modela za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila, vrši se poređenje sa dostupnim modelima i eksperimentalnim podacima.

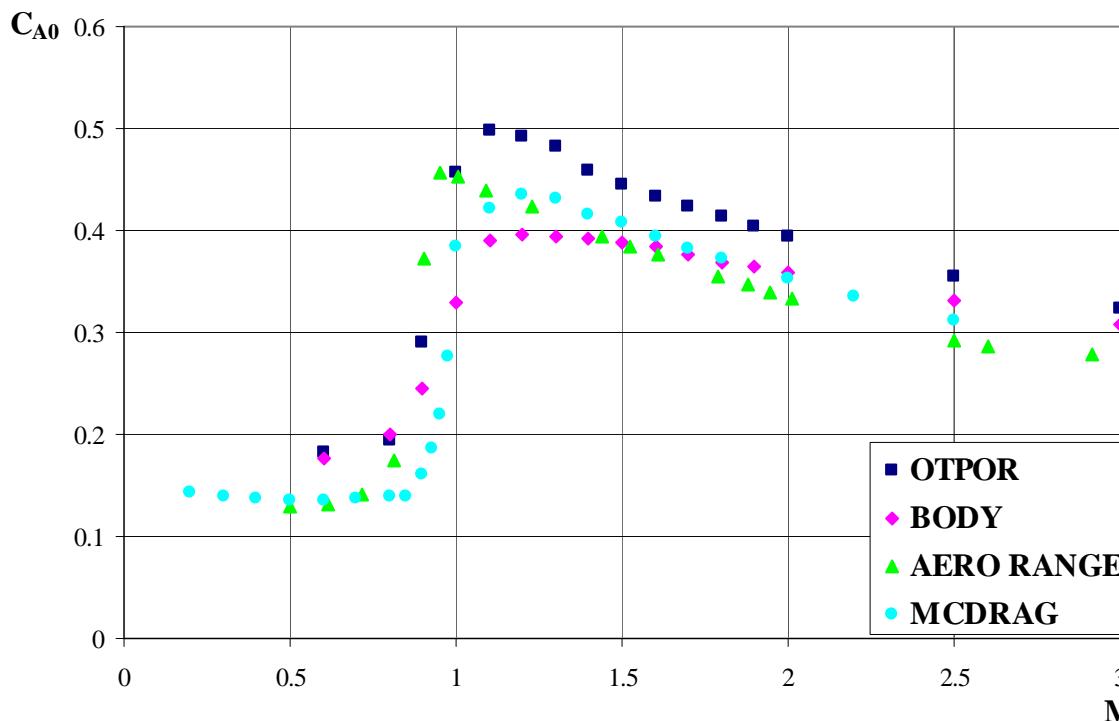
Vrijednosti koeficijenta aksijalne sile za pet projektila (po jedan malog i srednjeg kalibra, tri velikog kalibra) dobivene modelom OTPOR su komparirane sa vrijednostima dobivenim modelima BODY i MCDRAG i raspoloživim eksperimentalnim vrijednostima.

6.1 Projektil 7.62 mm M80

Za projektil 7.62 mm M80 eksperimentalne vrijednosti su određene na osnovu ispaljivanja iz puške M-14, na poligonu. Koeficijent aksijalne sile je određen fitovanjem podataka vrijeme-rastojanje kubnom jednačinom pomoću metode najmanjih kvadrata, a zatim je koeficijent C_D redukovana na nulti napadni ugao pomoću relacije:

$$C_D = C_{D0} + C_{D\sigma^2} \sigma^2 \quad (6.1)$$

Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil 7.62 mm M80 zavisno od Mach-ovog broja je prikazan na dijagramu u literaturi [8].



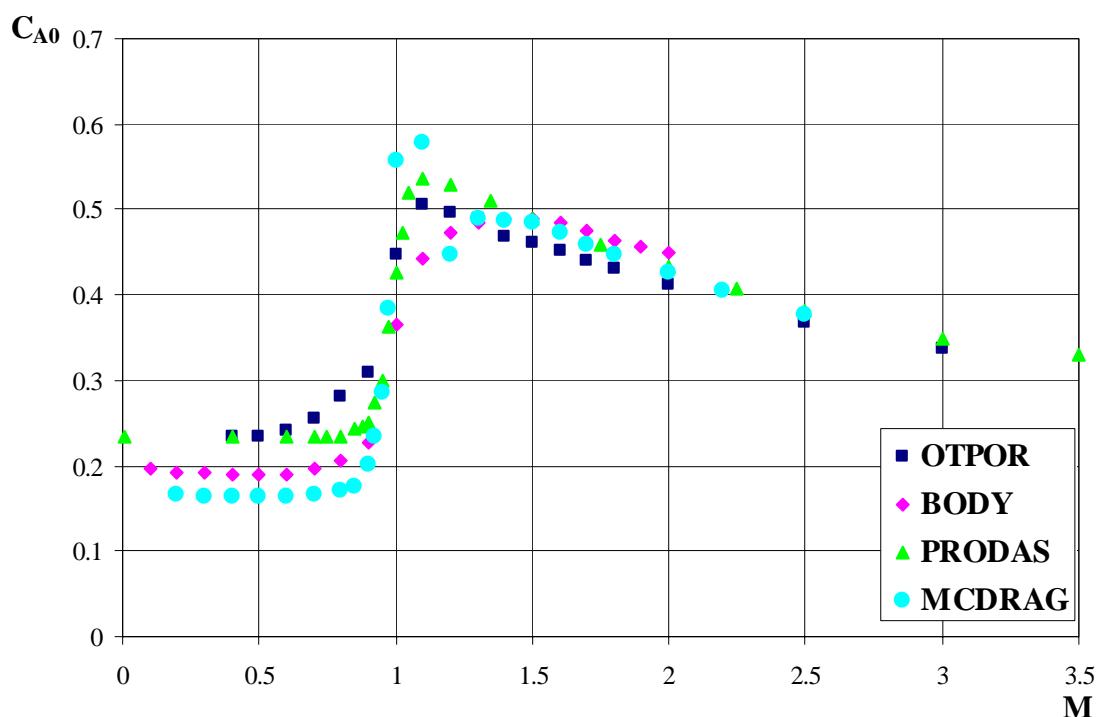
Slika 6.1: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil malog kalibra 7.62 mm M80

Sa slike se vidi da je kod projektila malog kalibra najbolje slaganje ostvareno u području nižih transoničnih brzina, dok se pri subsoničnim i supersoničnim Mach-ovim brojevima dobivaju veće vrijednosti. Karakter dobivene krive je veoma sličan krivoj dobivenoj na osnovu eksperimentalnih podataka.

Pošto ovi projektili lete u supersoničnom području, model OTPOR se, na projektile malog kalibra, može primjeniti samo za preliminarnu analizu.

6.2 Projektil 30 mm M789

Kao referentne vrijednosti, za projektil 30 mm M789, su uzete vrijednosti iz baze podataka ARROW TECH-a, model PRODAS.

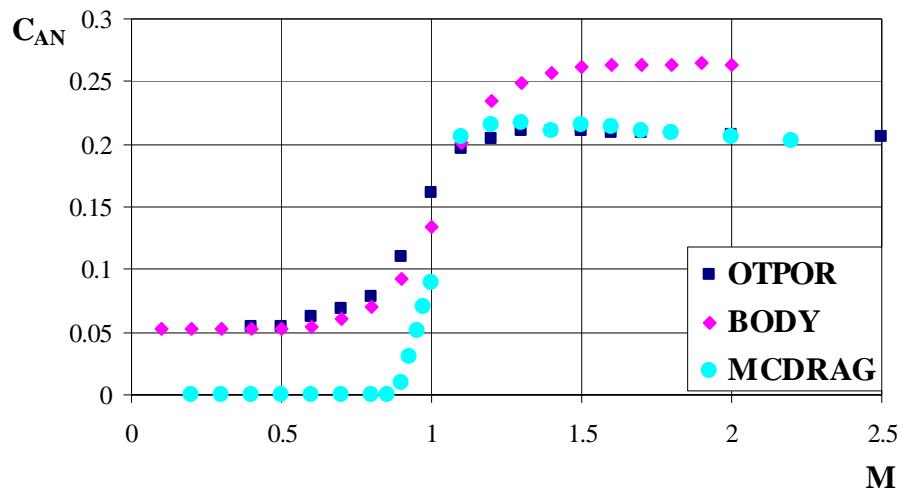


Slika 6.2: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil srednjeg kalibra 30 mm M789

Sa slike se vidi dobro slaganje između vrijednosti dobivenih modelom OTPOR sa vrijednostima PRODAS-a, naročito za transonične Mach-ove brojeve. Odstupanja koja se javljaju su u granicama očekivanog.

Pošto projektil 30 mm M789 ima zadnji dio oblika kalote, u modelima OTPOR i MCDRAG je rađeno sa pretpostavkom da je zadnji dio oblika kratkog konusa sa malim uglom nagiba. U modelu BODY je pretpostavljeno da projektil nema zadnji dio, jer za kratki konus sa malim uglom nagiba model ne može dati rezultate.

Zbog različitosti navedenih pretpostavki, za projektil 30 mm M789 je izvršeno samo poređenje vrijednost koeficijenata otpora prednjeg dijela dobivenih ovim modelima prikazanih na slici 6.2a.

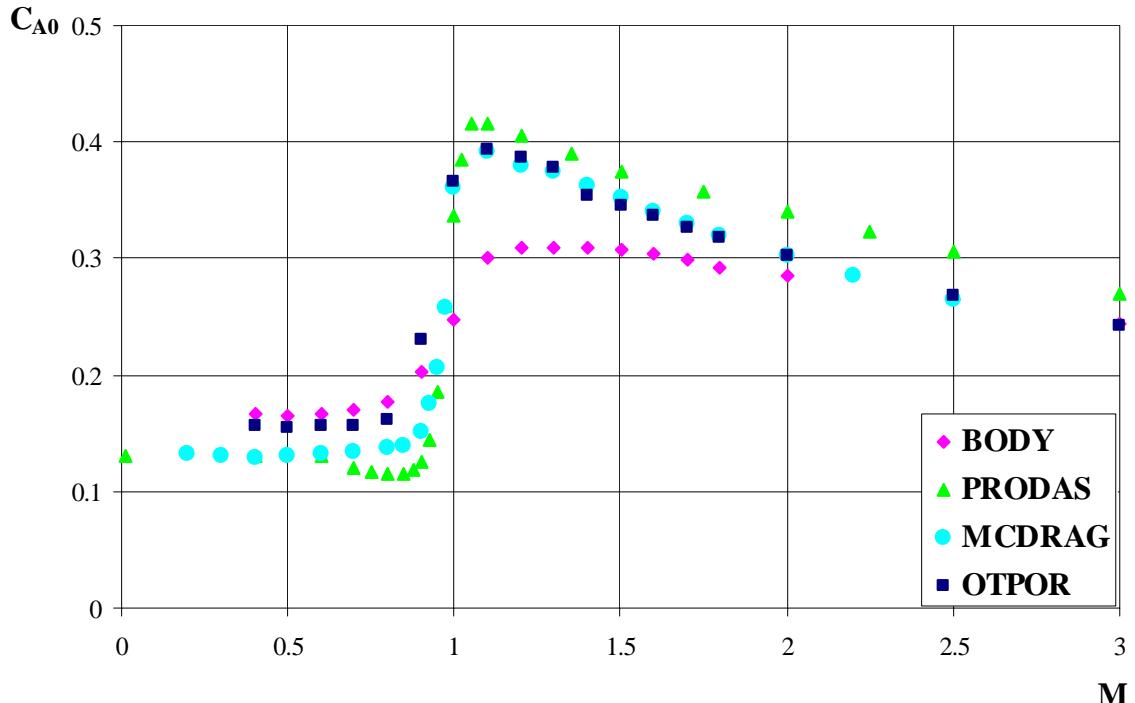


Slika 6.2a.: Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil malog kalibra 30 mm M789

Rezultati dobiveni modelima OTPOR i MCDRAG za $M > 1$ su veoma bliski, dok model BODY daje veće vrijednosti za $M \geq 1.2$. U subsoničnom području i području nižih transoničnih brzina modeli OTPOR i BODY pokazuju dobro slaganje, a niže vrijednosti u modelu MCDRAG su posljedica zanemarivanja talasnog otpora (otpora uslijed pritiska) u ovom području.

6.3 Projektil 105 mm M1

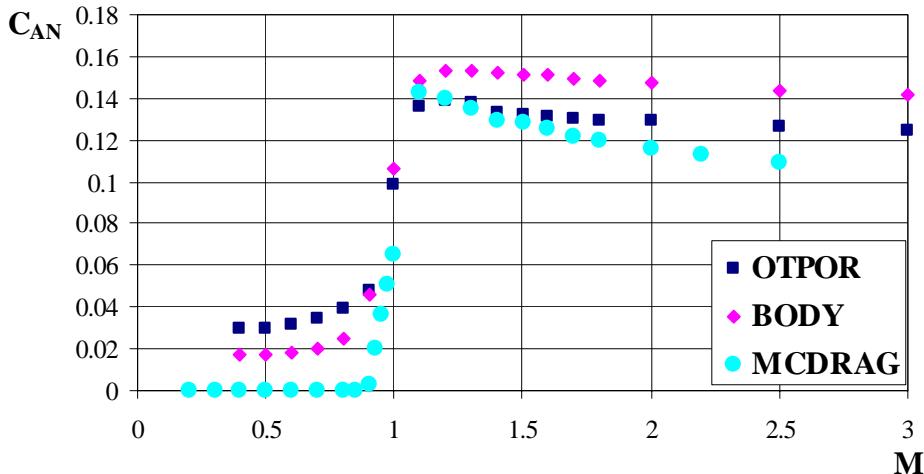
Za projektil 105 mm M1, referentne vrijednosti su uzete iz modela PRODAS.



Slika 6.3: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 105 mm M1

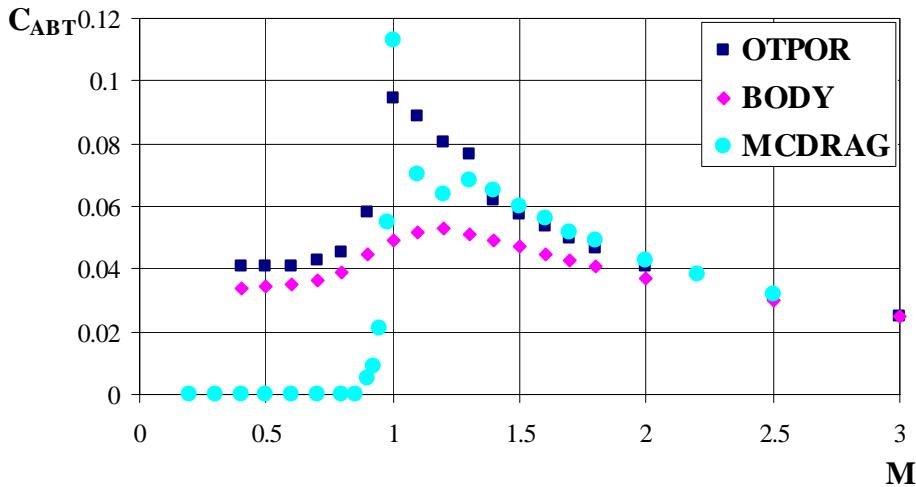
Za $M \geq 1$, vrijednosti dobivene modelima OTPOR i MCDRAG pokazuju odlično slaganje. Model BODY daje niže vrijednosti u ovom opsegu Mahovih brojeva, a model PRODAS više. U subsoničnom području, u modelima OTPOR i BODY se uzima u obzir otpor uslijed pritiska, tako

da su dobivene više vrijednosti od onih predviđenih modelima PRODAS i MCDRAG u kojima se smatra da otpor pritiska nastaje tek u transoničnom području.



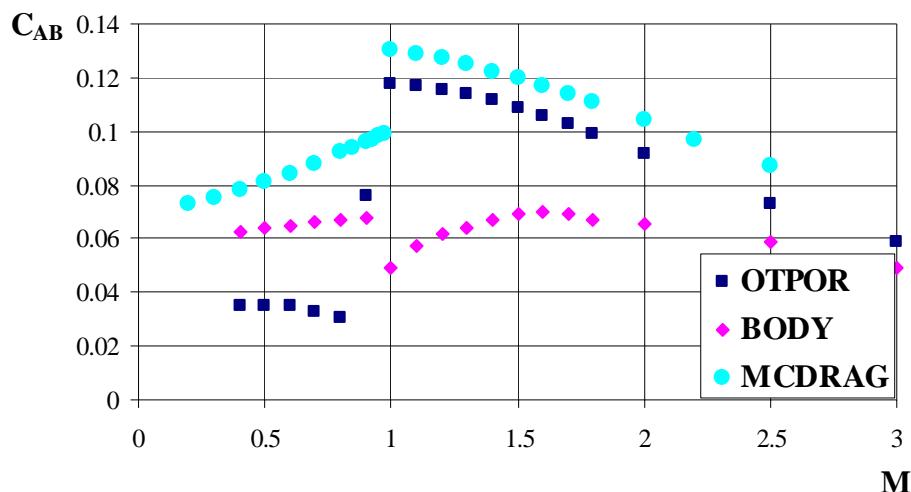
Slika 6.3a: Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil velikog kalibra 105 mm M1

Koeficijent otpora prednjeg dijela predviđen modelom OTPOR, u kojem se prednji dio posmatra kao složen uzimajući u obzir i upaljač, u subsoničnom području ima veću vrijednost od koeficijenta otpora dobivenog modelima BODY i MCDRAG, a u području supersoničnih brzina je između ovih vrijednosti. U transoničnom području, model OTPOR daje vrijednosti bliže vrijednostima predviđenim modelom BODY, nego onim ostvarenim pomoću modela MCDRAG jer se u modelu MCDRAG prednji dio aproksimira jednom krivom.



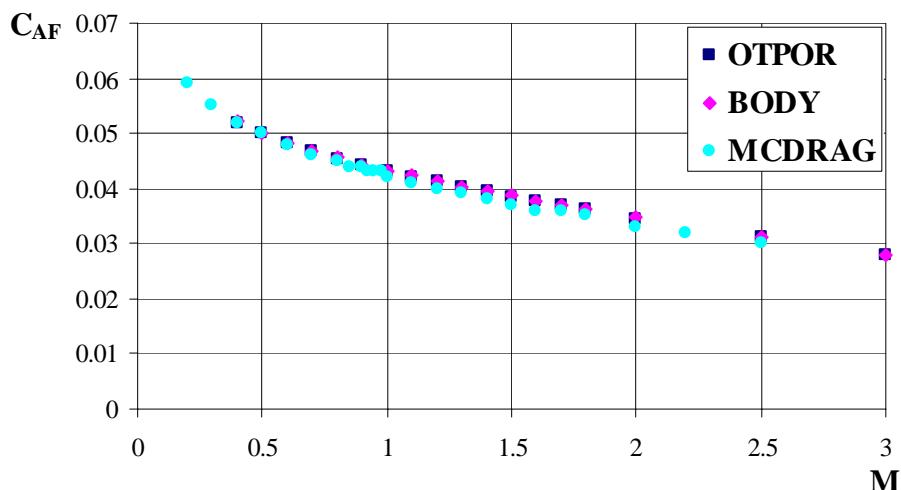
Slika 6.3b: Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil velikog kalibra 105 mm M1

U modelu MCDRAG se pretpostavlja da nema otpora zadnjeg dijela uslijed pritiska u subsoničnom regionu, a za transonični i supersonični region koeficijent otpora zadnjeg dijela se određuje iz jednačine malih poremećaja drugog reda uz primjenu zakona sličnosti, pri čemu se za transonično područje parametar sličnosti ne može naći u literaturi. Model OTPOR koristi eksperimentalne podatke za područja subsonike i transonike, a za supersoniku se koristi zakon sličnosti. Vrijednosti predviđene modelom BODY se značajno razlikuju za transonične Mach-ove brojeve od vrijednosti određenih pomoću druga dva modela.



Slika 6.3c: Koeficijent otpora dna za projektil velikog kalibra 105 mm M1

Vrijednosti koeficijenta otpora dna predviđene modelima OTPOR, BODY i MCDRAG se potpuno razlikuju u svim područjima Mach-ovog broja, s tim da krive određene modelima OTPOR i MCDRAG za $M \geq 1$ imaju istu tendenciju.

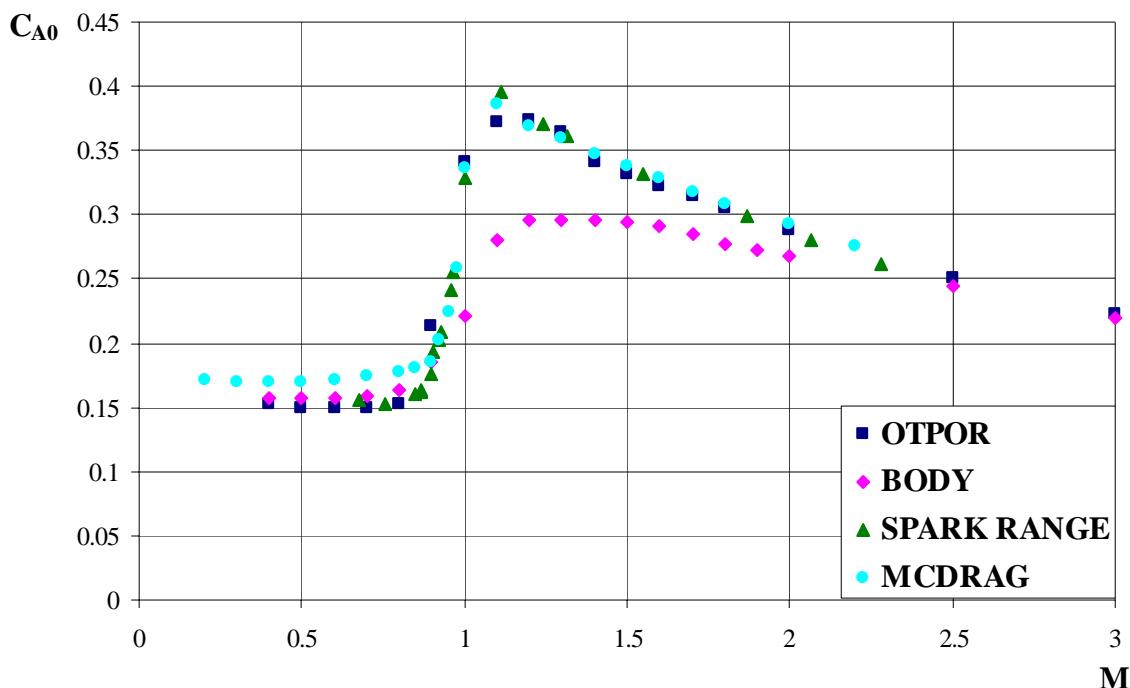


Slika 6.3d: Koeficijent otpora trenja za projektil velikog kalibra 105 mm M1

Koeficijent otpora trenja, određen modelima OTPOR, BODY i MCDRAG, pokazuje odlično slaganje. Minimalne razlike nastaju zbog načina određivanja površine omotača projektila.

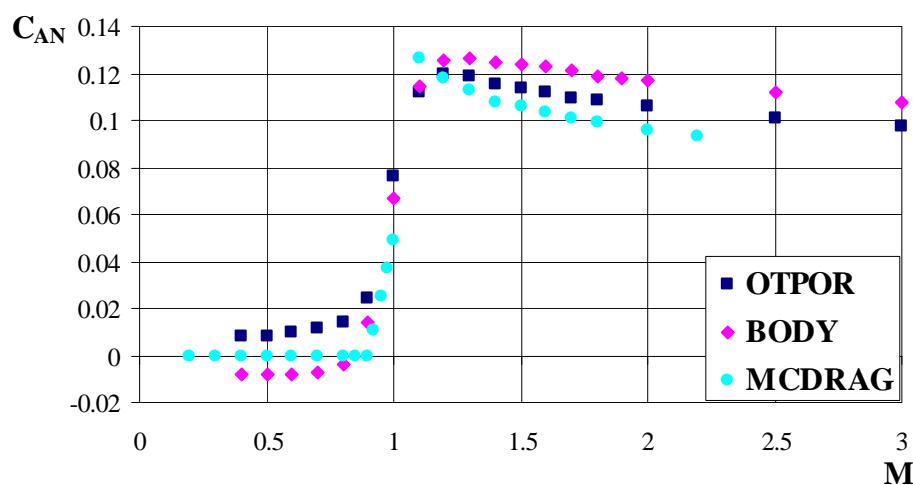
6.4 Projektil 155 mm M483A1

Referentne vrijednosti za projektil 155mm M483A1 su preuzete iz literature [6]. Radi se o vrijednostima dobivenim eksperimentalnim putem. Ispitivanja su vršena ispaljivanjem 20 projektila na poligonu. Dimenzionalne karakteristike i fizičke osobine svakog od testiranih projektila mjerene su neposredno prije ispaljivanja. Svođenje podataka je vršeno linearnom teorijom, a aerodinamički koeficijenti su određeni metodologijom 6DOF (6 stepeni slobode).



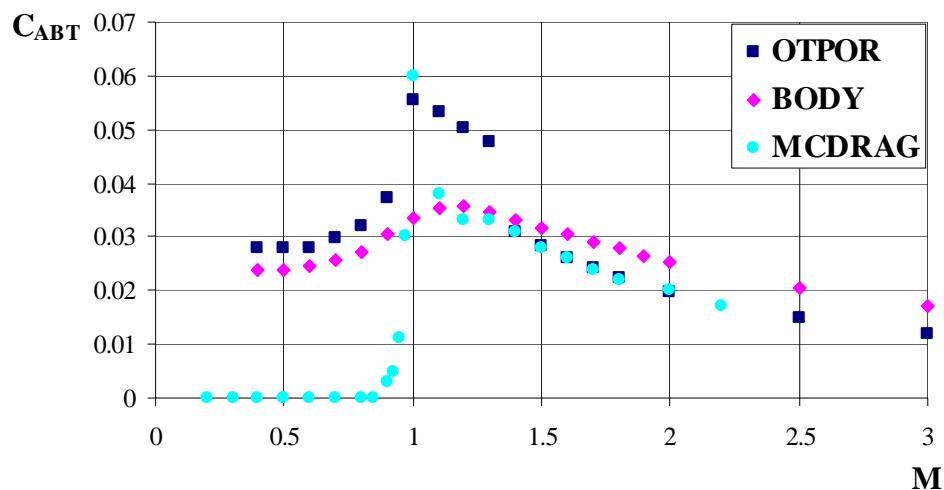
Slika 6.4: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 155 mm M483A1

Poređenjem vrijednosti aerodinamičkog koeficijenta aksijalne sile pri nultom napadnom uglu, dobivenih modelima OTPOR i MCDRAG, sa vrijednostima sa poligona vidi se odlično slaganje.



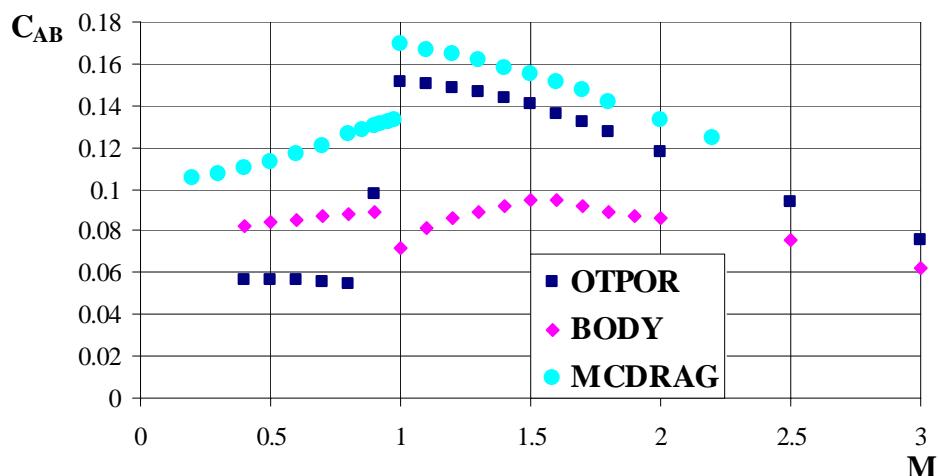
Slika 6.4a: Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil 155 mm M483A1

Vrijednosti koeficijenta otpora prednjeg dijela predviđene modelom OTPOR su niže od onih dobivenih modelom BODY a više od onih dobivenih modelom MCDRAG, u supersoničnom području, iz razloga što se u modelu OTPOR i oblik upaljača uzima u obzir. Razlike u subsonici su posljedica zanemarivanja otpora prednjeg dijela u modelu MCDRAG i uzimanja u obzir negativnih vrijednosti u modelu BODY.



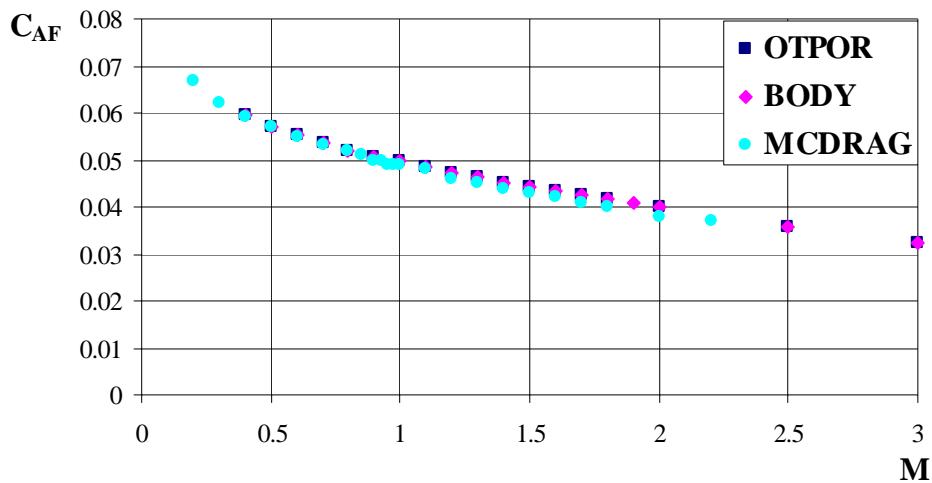
Slika 6.4b: Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil 155 mm M483A1

Vrijednosti koeficijenta otpora zadnjeg dijela predviđene modelima OTPOR i MCDRAG se, u području supersoničnih brzina, podudaraju, dok u drugim područjima postoji odstupanje što je posljedica različitosti modula za predviđanje koeficijenta otpora zadnjeg dijela korištenih u pojedinim modelima.



Slika 6.4c: Koeficijent otpora dna za projektil 155 mm M483A1

Vrijednosti koeficijenta otpora dna predviđene modelima OTPOR, BODY i MCDRAG se potpuno razlikuju u svim područjima Mach-ovog broja, s tim da krive određene modelima OTPOR i MCDRAG za $M \geq 1$ imaju istu tendenciju.

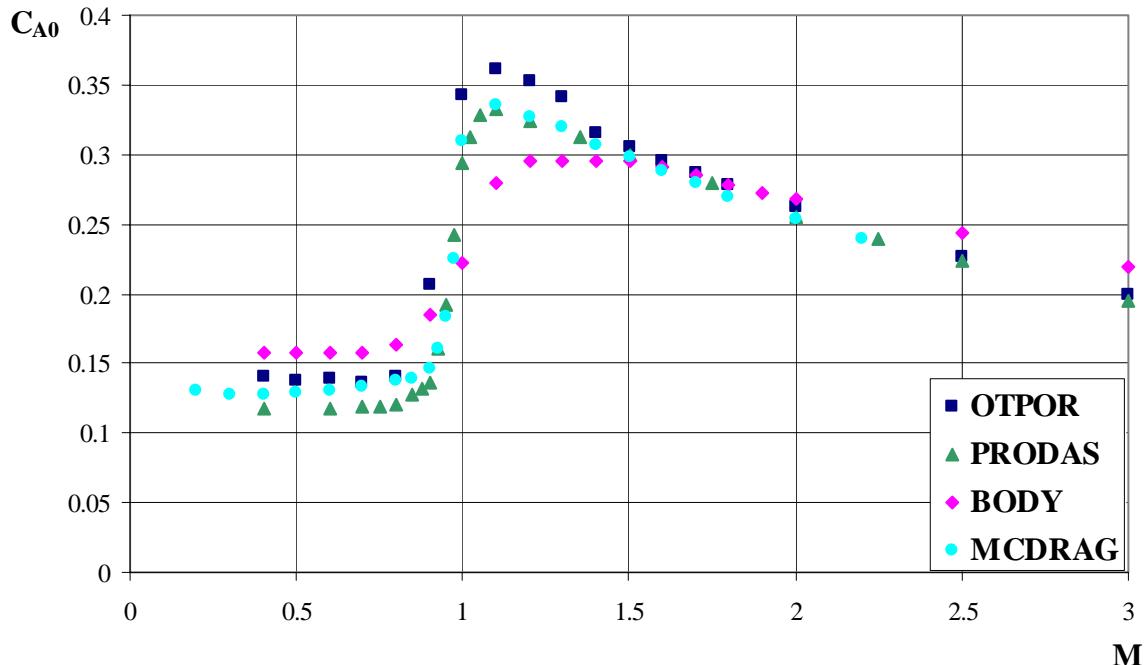


Slika 6.4d: Koeficijent otpora trenja za projektil 155 mm M483A1

Razlike u vrijednostima koeficijenta otpora trenja predviđenog modelima OTPOR, BODY i MCDRAG su posljedica načina na koji je proračunata površina omotača projektila.

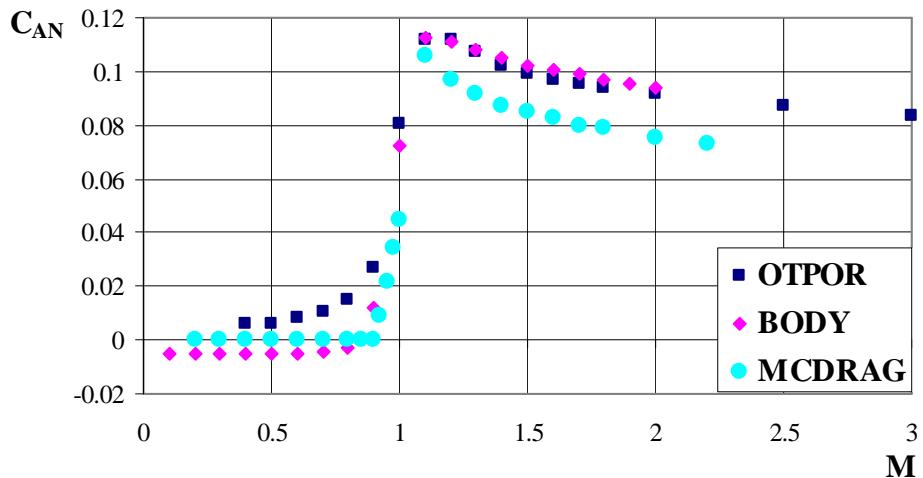
6.5 Projektil 155 mm M549

Za projektil 155 mm M549 porede se vrijednosti dobivene modelima OTPOR, BODY, MCDRAG i one koje se preuzele iz modela PRODAS.



Slika 6.5: Koeficijent otpora pri nultom napadnom uglu za projektil velikog kalibra 155 mm M549

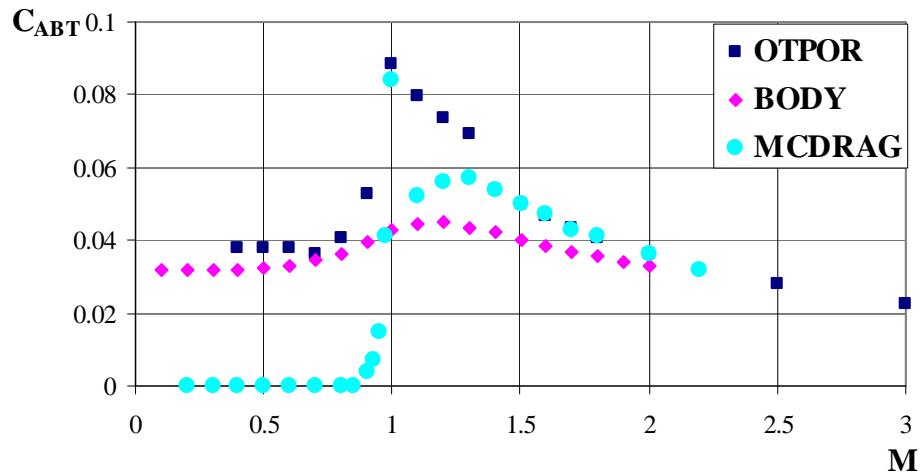
Model OTPOR daje nešto veće vrijednosti koeficijenta otpora pri nultom napadnom uglu u poređenju sa vrijednostima dobivenim modelima MCDRAG i PRODAS.



Slika 6.5a: Koeficijent otpora prednjeg dijela za projektil velikog kalibra 155 mm M549

Razlika u subsoničnom području nastaje zbog toga što model BODY, pri $M < 0.8$, daje negativne vrijednosti, a model MCDRAG polazi od pretpostavke da je otpor uslijed pritiska jednak nuli za $M < 0.9$.

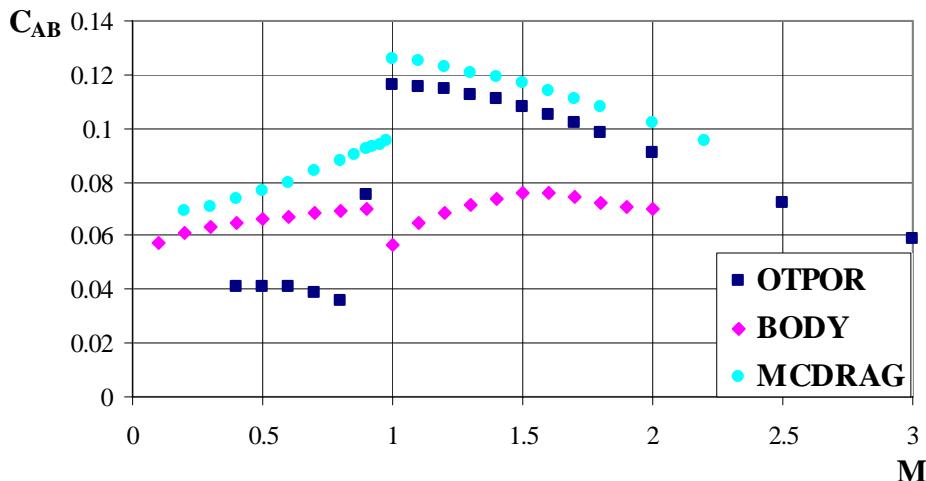
U transoničnom i supersoničnom području, odstupanja modela OTPOR i BODY u odnosu na MCDRAG su posljedica načina posmatranja prednjeg dijela. Model MCDRAG prednji dio posmatra bez diskontinuiteta uzimajući u obzir zatupljenje, tj. aproksimira ga zatupljenim oživalom ili konusom, model BODY razmatra i oblik vrha projektila (zatupljenost ili zaobljenost), dok model OTPOR prednji dio posmatraju kao složen (oblik vrha + upaljač + ožival ili konus).



Slika 6.5b: Koeficijent otpora zadnjeg dijela za projektil velikog kalibra 155 mm M549

I za koeficijent otpora zadnjeg dijela u području subsoničnih brzina u modelu MCDRAG se pretpostavlja da je zanemarljiv. Model BODY za predviđanje ove komponente otpora koristi dijagrame [1], dok se u modelu OTPOR koriste eksperimentalni podaci [2].

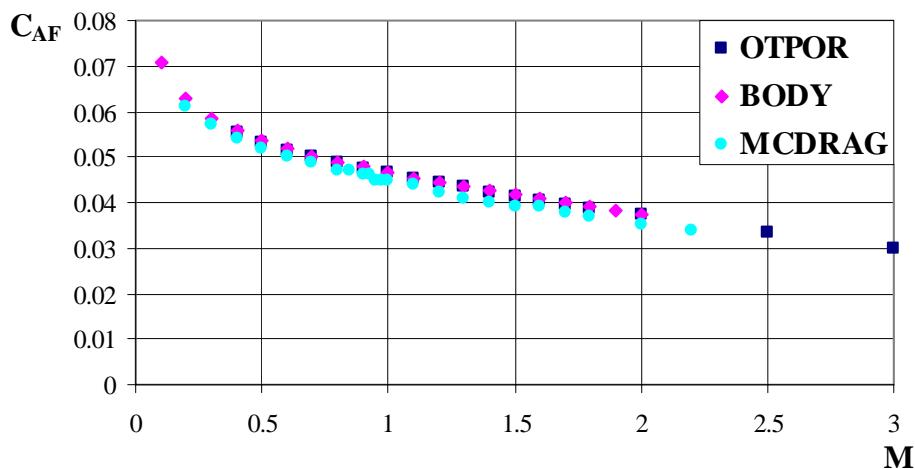
Za transonične Mach-ove brojeve, ova tri modela daju različite rezultate, dok u supersoničnom području, za $M > 1.5$, modeli MCDRAG i OTPOR pokazuju dobro slaganje.



Slika 6.5c: Koeficijent otpora dna za projektil velikog kalibra 155 mm M549

Krive dobivene modelima OTPOR i MCDRAG imaju isti oblik za $M \geq 1$, a razlika u vrijednostima nastaje zbog načina na koji se uzima u obzir prisustvo zadnjeg konusa (u OTPOR-u se koristi empirijska formula [19], a u MCDRAG-u procjena se vrši na osnovu odnosa baznog pritiska prema statičkom pritisku slobodnog toka [17]).

U subsoničnom području u modelu OTPOR se koriste eksperimentalni podaci [2], dok u modelu BODY koristi se empirijsku formulu Kurzweg-a a u MCDRAG-u odnos baznog i statičkog pritiska.



Slika 6.5d: Koeficijent otpora trenja za projektil velikog kalibra 155 mm M549

Razlike u vrijednostima koeficijenta otpora trenja, predviđenim modelima OTPOR, BODY i MCDRAG, posljedica su načina na koji je proračunata površina omotača projektila.

7. Zaključak

Na osnovu teoretskih razmatranja i analizom dostupnih modela za predviđanje aerodinamičkog koeficijenta otpora pri nultom napadnom za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila, postavljen je sopstveni model za predviđanje sile otpora pri nultom napadnom uglu za osnosimetričnu brzorotirajuću konfiguraciju projektila nazvan OTPOR.

Za potrebe ovog modela formirane su sljedeće baze podataka:

- Baza podataka o koeficijentu otpora špicastog prednjeg dijela oblika konusa (za vitkost od 1.5 do 5 i Mahov broj od 0.6 do 5) i oblika tangentnog oživila (za vitkost od 2 do 5 i Mahov broj od 0.6 do 5)
- Baza podataka o koeficijentu otpora za razne eliptičke oblike prednjeg dijela – vrha projektila (za vitkost od 0 do 2 i Mahov broj od 0.4 do 3.5)
- Baza podataka o koeficijentu otpora zadnjeg dijela oblika konusa, za ugao nagiba konusa do 16° i kvadrata odnosa prečnika baze i kalibra projektila od 0 do 1, u subsoničnom području
- Baza podataka o koeficijentu otpora upuštenog dna u funkciji ugla nagiba zadnjeg konusa od 0° do 16° i kvadrata odnosa prečnika baze i kalibra projektila od 0.1 do 0.9 za subsonične i transonične Mahove brojeve
- Baza podataka o koeficijentu otpora vodećeg prstena

Izvršeno je uspoređenje podataka dobivenih primjenom modela OTPOR sa dostupnim eksperimentalnim podacima i podacima dobivenim primjenom modela BODY i MCDRAG. Konstatovani su sljedeći zaključci:

1. Razvijeni model OTPOR važi za subsonični, transonični i supersonični tok.
2. Moguće je predvidjeti koeficijent otpora za većinu konfiguracija projektila sa tačnošću većom od 90% u usporedbi sa eksperimentalnim rezultatima.
3. Model OTPOR omogućava uzimanje u obzir realne konfiguracije upaljača pri određivanju otpora prednjeg dijela projektila čime je povećana tačnost predviđanja ove komponente otpora.
4. Modul za određivanje otpora dna u ovom modelu omogućava procjenu otpora i za projektile sa upuštenim dnom.
5. Ugrađena je mogućnost računanja utjecaja prisustva vodećeg prstena na otpor projektila.
6. U subsoničnom području otpor koji nastaje uslijed pritiska može se zanemariti kod projektila malog kalibra.
7. Utvrđeno je da se veća tačnost u procesu predviđanja otpora postiže kod projektila koji imaju manju razliku u vitkosti upaljača i oživila

Danas se sve više koriste CFD softveri za tačno rješavanje određenih transoničnih i supersoničnih problema u aerodinamici projektila. Zbog toga je jedan od prvih zadataka, koji predstoje u daljem istraživanju, primjena numeričkih simulacija u razmatranju ponašanja projektila pri određenim napadnim uglovima i primjene base bleed-a ili raketnog motora u zadnjem dijelu osnosimetričnih projektila u cilju smanjenja otpora dna.

Pošto nisu dostupne baze podataka za sekantni ožival projektila, potrebno je nastaviti rad na razvoju novog modula u okviru modela OTPOR na osnovi dostupnih eksperimentalnih vrijednosti za raspoložive projektile za predviđanje aksijalne sile prednjeg i zadnjeg dijela projektila.

U daljem radu je moguće proširiti model na projektile sa zaobljenim zadnjim dijelom i zadnjim dijelom oblika divergentnog konusa (konusa koji se širi) čime bi se povećao broj konfiguracija projektila za koje je moguće izvršiti predviđanje otpora.

S obzirom da na projektil u realnim uslovima djeluju pored sile otpora i sila uzgona i Magnus-ova sila, odnosno momenti (Magnus-ov moment, moment propinjanja, moment skretanja, prigušni moment), model treba proširiti i u ovom pravcu.

U daljoj fazi istraživanja nužno je razmatrati kombinaciju tijelo – krilo, čime se omogućava primjena ovog modela na minobacačke i raketne projektile. Na taj način bi se omogućilo stvaranje ulaznih podataka za spoljno-balističku analizu ponašanja projektila na putanji (model modifikovane materijalne tačke ili modela sa šest stepeni slobode).

LITERATURA:

- [1] Lebedev A. A., Černobrovkin L. S.: Dinamika poljota, Mašinostroenije, Moskva, 1973.
- [2] Payne P.R.: Afterbody drag, Payne Incorporated Annapolis, Maryland, 1980.
- [3] Moore, F.G.: A study to optimize the aeroballistics design of naval projectiles, NWL TR-2337, 1969.
- [4] Nielsen, J. N.: Missile aerodynamics, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [5] Mihtaryan, A. M.: Aerodynamika, Mašinostroenije, Moskva, 1976
- [6] Whyte, R. H.: Aerodynamic coefficients of the M483A1 determined from Spark Range tests, BALLISTIC RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1991.
- [7] McCoy, R. L. : Aerodynamic characteristics of the 30mm XM788E1 and XM789 projectiles, ARMY BALLISTIC RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1982.
- [8] Piddington, M. J.: Aerodynamic characteristics of the 7.62 mm NATO ammunition M59, M80, M61, M62, ARMY BALLISTIC RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1967.
- [9] Syvertson, C. A.; Dennis, D. H.: A second-order shock-expansion method applicable to bodies of revolution near zero lift, NACA Report 1328, 1957.
- [10] Janković, S.: BODY, Zagreb, 1997.
- [11] Janković, S.: Aerodinamika projektila, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 1978.
- [12] Janković, S.: Mehanika leta projektila, Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, Zagreb, 1998.
- [13] Biblarz, O.: Phase Plane Analysis of Transonic Flows, AIAA 9th Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Diego, California, July 14-16, 1976 (AIAA paper), 1976
- [14] Moore, F.G; Armistead, M. A.; Rowles, S. H.; DeJarnette F. R.: Second-order shock-expansion theory extended to include real gas effects, WEAPONS SYSTEMS DEPARTMENT AND NORTH CAROLINA STATE UNIVERSITY, 1992
- [15] Sykes, D.M.: Experimental investigation of the pressures on boat-tailed afterbodies in transonic flow with a low-thrust jet, ROYAL ARMAMENT RESEARCH AN DEVELOPMENT ESTABLISHMENT MEMORANDUM 39/70, FORT HALSTEAD, KENT, ENGLAND, 1970.
- [16] McCoy, R.L. : "MC DRAG" – A computer program for estimating the drag coefficients of projectiles, U.S. ARMY BALLISTIC RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1981.
- [17] Chapman, D. R.: An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiment, NACA Report 1051, 1951.
- [18] Wu, J. M.; Aoyoma, K.: Pressure distribution for axisymmetric bodies with discontinuous curvature in transonic flow, U. S. Army Missile Command Technical Report No. RD-TR-70-25, 1970
- [19] Stoney, W. E.: Collection of zero-lift data on bodies of revolution from free-flight investigation, NASA TR R-100, 1961.

- [20] Moore, F.G: Body alone aerodynamics of guided and unguided projectiles at subsonic, transonic and supersonic Mach numbers, TR-2796, U. S. NAVAL WEAPONS LABORATORY DAHLGREN, VIRGINIA, 1973.
- [21] Engineering Design Handbook: DESIGN FOR CONTROL OF PROJECTILE FLIGHT CHARACTERISTICS, AMCP 706-242, REDSTONE ARSENAL, ALABAMA, 1966.
- [22] Siewert J.; Whyte B.: SPINNER 2004, ARROW TECH, www.dtic.mil/ndia/2004guns/fri/spinner.ppt
- [23] Military handbook: DESIGN OF AERODYNAMICALLY STABILIZED FREE ROCKETS, MIL-HDBK-762(MI), Department of Defense, 1990.
- [24] Mason L.; Devan, L.; Moore, F. G.; McMillan, D.: Aerodynamic design manual for tactical weapons, NSWC TR 81-156, Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia, 1981.
- [25] Moore, F.G.; Hymer, T. C.: Improved power-on base drag methodology for the aeroprediction code, NSWCDD/TR-00/67, Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia, 2001.
- [26] Moore, F.G.: Approximate methods for weapon aerodynamics, Progress in astronautics and Aeronautics, Vol. 186, 2000.
- [27] Van Dyke, M. D.: A study of second order supersonic flow theory, NACA TN 2200, Washington, 1951.
- [28] Van Dyke, M. D.: The similarity rules for second-order subsonic and supersonic flow, NACA TN 3875, Washington, 1957.
- [29] Moga, N. J.: Optimal bodies for minimum total drag at supersonic speeds, NSWC TR 80-2086, Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia, 1980.
- [30] Lamb, P. J.; Oberkampf, W. L.: A review and development of correlations for base pressure and base heating in supersonic flow, SAND93-0280, Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico, and Livermore, California, 1993.
- [31] Weinacht, P.: Prediction of Projectile Performance, Stability, and Free-Flight Motion Using Computational Fluid Dynamics, ARL-TR-3015, ARMY RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 2002.
- [32] Soencksen, K. P.; Newill, J. F.; Plostins, P.: Aerodynamics of the 120-mm M831A1 Projectile: Analysis of Free Flight Experimental Data, ARL-TR-2307, ARMY RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 2000.
- [33] Mikhail, A. G.: Flow Simulation and Drag Components for HEAT Projectiles with Spike and Cone Noses, ARL-TR-893, ARMY RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1995.
- [34] Platou, A. S.: Improving the Flight Performance of Projectiles, ARBRL-TR-02165, ARMY RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 1979.
- [35] Catalano, G. D.; Sturek, W. B.: Numerical Investigation of Subsonic and Supersonic Flow Around Axisymmetric Bodies, ARL-TR-2595, ARMY RESEARCH LAB ABERDEEN PROVING GROUND MARYLAND, 2001.
- [36] Wilcox, D. C.: Projectile Base Flow Analysis, DCW-38-R-05, DCW INDUSTRIES INC LA CANADA CA, 2003.
- [37] Krasnov, N. F.: Aerodynamics of bodies of revolution, ISBN 0-444-00076-3, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1970.

- [38] Janković, S.: Spoljna balistika, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 1977.
- [39] Anderson, J. D.: Fundamentals of aerodynamics, ISBN 0-07-001679-8, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [40] Liepmann, H.W., Roshko, A.: Elements of gas dynamics, John Wiley and Sons, Inc., 1957.
- [41] Zucrow, M. J.; Hoffman, J. D.: Gas dynamics, Vol. I and II, John Wiley and Sons, Inc., 1976.
- [42] Kesić P.: Osnove aerodinamike, Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, Zagreb, 2003.
- [43] Van Dyke, M. D.: An album of fluid motion, THE PARABOLIC PRESS STANFORD, CALIFORNIA, 1982.
- [44] Janković, S.; Virag, Z.; Vrdoljak, M.: Aerodinamika I, FSB, Zavod za zrakoplovstvo i zavod mehanike fluida, www.fsb.hr/hydro/web_sites/Biblioteka.htm, Zagreb, 2007.
- [45] Janković, S.; Virag, Z.; Vrdoljak, M.: Aerodinamika II, FSB, Zavod za zrakoplovstvo i zavod mehanike fluida, www.fsb.hr/hydro/web_sites/Biblioteka.htm, Zagreb, 2007.
- [46] Military handbook: FIRE CONTROL SYSTEMS - GENERAL, MIL-HDBK-799(AR), Department of Defense, 1996.
- [47] Nixon, D.: Transonic aerodynamics, AIAA, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 81, 1982.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rođena sam 14. marta 1968 godine u Sarajevu, BIH. Udata sam i imam dvoje djece.

Osnovnu školu "Miljenko Cvitković", gimnaziju "Ognjen Prica", smjer primjenjena matematika i fizika, završila sam u Sarajevu.

Mašinski fakultet, smjer raketna tehnika, završila sam u Sarajevu sa prosječnom ocjenom 8.05.

Diplomski rad nosio je naziv "*Spoljno-balistički proračun projektila 155mm M549 metodom modifikovane materijalne tačke*".

Od 04. 03. 1999 godine zaposlena sam na Mašinskom fakultetu u Sarajevu u zvanju višeg laboranta.

Na osnovu Odluke NNV, od 09. 06. 2000 godine, izabrana sam u zvanje asistenta za naučnu oblast „Pogon i konstrukcija projektila“, a od 11. 07. 2003 godine za naučnu oblast „Odbrambene tehnologije“

Pored redovnih aktivnosti na izvođenju vježbi iz matične oblasti, od 2000 godine angažovana sam i na pripremnom dijelu studija na Mašinskom fakultetu, što je obuhvatalo vježbe iz predmeta Kinematika, Dinamika, Računarska tehnika, Matematika I i Matematika II.

Na Postdiplomskom studiju na Mašinskom Fakultetu u Sarajevu, smjer Balistika, ostvarila sam prosječnu ocjenu 9.22.